

Über die beste Coapproximation im $\mathbb{R}^n$

von

Lothar Hetzelt

aus

Altenkunstadt

1981
1981

1982 № 83



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546222_0038

Über die beste Coapproximation im $\mathbb{R}^n$

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Lothar Hetzelt

aus

Altenkunstadt

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 10.11.1981

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Professor Dr. H. Berens

Zweitberichterstatter: Professor Dr. U. Westphal

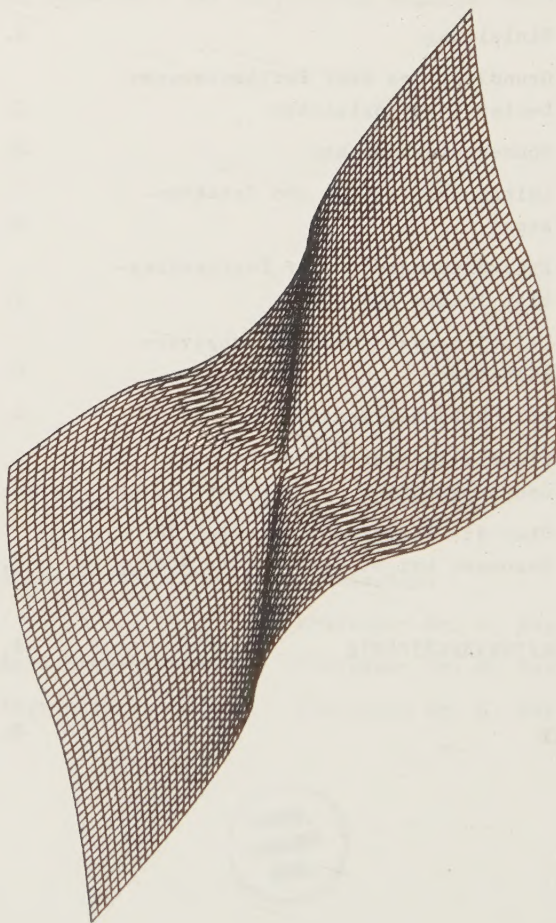


INHALTSVERZEICHNIS:

0. Einleitung	S. 3
1. Grundlegendes über Existenzmengen bester Coapproximation	S. 8
2. Sonnen und Cosonnen	S. 21
3. Leibnizsche Ebenen und Schatten- kegel	S. 26
4. Existenzmengen bester Coapproxima- tion in der Ebene	S. 35
5. Leibnizgeraden und Krümmungsver- hältnisse	S. 53
6. Cotschebycheffmengen	S. 60
7. Lineare Existenzmengen bester Coapproximation	S. 71
8. Über die Konvexitätsstruktur der Cosonnen bei striktkonvexer Norm	S. 79

LITERATURVERZEICHNIS	S. 93
----------------------	-------

INDEX	S. 96
-------	-------



0. Einleitung

Wir wollen die beste Coapproximation im $\mathbb{R}^n$ untersuchen. Am roten Faden einer Beschreibung der Existenz- und Eindeutigkeitsmengen bester Coapproximation sollen die Unterschiede, aber auch die deutlichen Parallelen zum wohlbekannten Begriff der besten Approximation herausgearbeitet werden. Insgesamt erweist sich dabei die beste Coapproximation wegen ihrer "übersichtlicheren Geometrie" zugänglicher als die beste Approximation.

In Abschnitt 1 wird eine Beschreibung der Existenzmengen bester Coapproximation nach zwei wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten gegeben. Einerseits sprechen wir die Charakterisierung einer solchen Existenzmenge über den Begriff der Schnitt- bzw. Durchschnittszahl, andererseits den Begriff der Leibnizschen Ebene und seine Rolle bei der besten Coapproximation an.

Abschnitt 2 beschäftigt sich mit einer Gegenüberstellung der Begriffe Sonne und Cosonne und zeigt, daß die bekannten Zerlegungseigenschaften des $\mathbb{R}^n$, die Sonneneigenschaften garantieren, ihre Entsprechung bei der besten Coapproximation finden. So sehen wir insbesondere, daß bei striktkonvexer Norm jede Existenzmenge bester Coapproximation eine Cosonne ist.

In Abschnitt 3 gewinnen wir einen ersten Überblick über das Stetigkeitsverhalten und den Verlauf einer Leibnizschen Ebene. Dabei spielen die Begriffe der Schattengrenze und des Schattenkegels die wesentliche Rolle. Insbesondere findet sich im oberen Halbraum des Schattenkegels bei Cosonnen eine Entsprechung zum Abstiegskegel bei Sonnen.

Abschnitt 4 zeigt, daß sich diese Entsprechung in der Ebene noch wesentlich enger gestaltet. Eine Cosonne ist eine Sonne, wenn man nur die Ausgangsnorm durch die duale *-Norm ersetzt. Wegen der einfachen Struktur der Werte der besten Approximation bei Sonnen in der Ebene können wir die Sonnen charakterisierende Zerlegungseigenschaft wesentlich abschwächen und so auch eine vereinfachte Beschreibung der Cosonnen erhalten. Außerdem sind wir in der Lage in der

Ebene die Existenz einer strahlenförmigen, bezüglich der dualen $*$ -Norm stark kontraktiven Selektion der besten Approximation an Sonnen nachzuweisen. Da wir zeigen können, daß jede abgeschlossene, normkonvexe Menge in der Ebene eine Cosonne ist, erhalten wir insbesondere die Existenz von strahlenförmigen und stark kontraktiven Retraktionen auf Existenzmengen bester Coapproximation in der Ebene.

In Abschnitt 5 wird das asymptotische Verhalten von Leibnizgeraden in der Ebene untersucht und über die Krümmungsverhältnisse auf dem Rand des Einheitskreises charakterisiert.

Dies nützen wir in Abschnitt 6, um zu zeigen, daß Cotschebycheffmengen in Räumen mit "gutartigem" Krümmungsverhalten der Einheitskugel eine sehr einfache Gestalt haben müssen. Damit finden wir einen geometrischen Zugang zu Ergebnissen von Westphal ([27]). Ohne das Wohlverhalten der Einheitskugel wird die Gestalt von Cotschebycheffmengen i.a. komplizierter. Wir können deshalb eine vollständige Beschreibung aller auftretenden Cotschebycheffmengen nur in einer striktkonvex normierten Ebene geben. Ansonsten steht man selbst in der Ebene einer Vielzahl unterschiedlich gebauter Cotschebycheffmengen gegenüber.

In Abschnitt 7 werden gesondert die einfacheren Verhältnisse bei linearen Existenzmengen und ihr Zusammenhang mit dem Begriff des Schattenkegels beleuchtet. Dem fügen wir eine Beschreibung von linearen Existenzmengen über den Tschebycheffradius von Hyperkreisen der Einheitskugel und eine duale Interpretation von Schnittzahl und Durchschnittszahl bei.

In Abschnitt 8 schließlich wird die Konvexitätsstruktur der Menge der Cosonnen in einem striktkonvexen Raum eingehend untersucht. Zunächst finden wir eine Abgrenzung gegen den üblichen Konvexitätsbegriff. Es ergeben sich eine Reihe interessanter Eigenschaften des Hülloperators, der einer Menge die kleinste sie enthaltende Cosonne zuordnet. Damit sind wir in der Lage, die Hellyzahl der Menge der Cosonnen in endlichdimensionalen l_p -Räumen anzugeben. Abschließend wird auf eine Arbeit von Bronstein verwiesen, die die Exis-

tenz extremer Cosonnen in bestimmten Räumen sicherstellt.

ZUR NOTATION: X bezeichne stets einen endlichdimensionalen, reellen Banachraum, X' den zugehörigen Dualraum. Für reelle Zahlen verwenden wir die Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets. Die abgeschlossene Kugel um x mit Radius ρ wird mit $B(x, \rho)$, die offene mit $B^o(x, \rho)$ bezeichnet. Für eine Teilmenge K von X ist d_K die Distanzfunktion und P_K die metrische Projektion. ∂K sei der Rand von K , $\text{co}(K)$ die konvexe, $\text{lin}(K)$ die lineare Hülle von K und K^o die Polare zu K . Die abgeschlossene Strecke zwischen x und y wird durch $[x, y]$, der Strahl mit Anfangspunkt x , der über y läuft, durch $[x, y>$ gegeben.

Wir verwenden den üblichen Orthogonalitätsbegriff. Für $U, V \subseteq X$ sagen wir, daß U orthogonal zu V oder V transversal zu U ist, i.Z. $U \perp V$, wenn für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt:

$$\|u + \lambda v\| \geq \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Das semiinnere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ wird auf $X \times X$ durch das Gateauxdifferential von $\|\cdot\|^2/2$, d.h. durch

$$\langle y, x \rangle_s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2}{2\lambda}$$

definiert. Wir verwenden nur elementare Eigenschaften dieses Produkts. Insbesondere ist U genau dann orthogonal zu V , wenn $\langle v, u \rangle_s \geq 0$ und $\langle -v, u \rangle_s \geq 0$ für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt.

Ein Teil der Figuren entstand mittels der Graphiksoftware des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg. Den Darstellungen zugrunde liegende nichtlineare Gleichungen wurden durch einfache Bisektionsverfahren gelöst. Wir verzichten deshalb auf ein Auflisten der Programme.

An dieser Stelle möchte ich meinem verehrten Lehrer Professor Dr. Berens danken; danken dafür, daß er mich mit dem Gebiet der Approximationstheorie vertraut gemacht und über Jahre hinweg angeleitet hat, und daß ich in zahllosen Gesprächen, die ich mit Ihm führen durfte, wesentliche Anregungen nicht nur zu dieser Arbeit erfahren habe.



1. Grundlegendes über Existenzmengen bester Coapproximation

Für $K \subseteq X$ und $x \in X$ definieren wir

$$B_K(x) = \bigcap \{B(k, \|x-k\|) : k \in K\}$$

Dann heißt die durch

$$R_K(x) = B_K(x) \cap K$$

definierte mengenwertige Projektion $R_K: X \rightarrow 2^K$ die metrische Coprojektion zu K [16,25]. R_K ist oberhalbstetig. Jedes $k \in R_K(x)$ heißt Element bester Coapproximation von x in K . Man nennt K eine Existenzmenge bester Coapproximation (in X), wenn $R_K(x)$ für alle $x \in X$ nicht leer ist. Ein Punkt von X sowie X selbst sind trivialerweise Existenzmengen bester Coapproximation. Zu den trivialen Existenzmengen bester Coapproximation rechnen wir auch die leere Menge.

BEMERKUNG 1.1: Existenzmengen bester Coapproximation sind abgeschlossen.

Wenn X eindimensional ist, sind die nichttrivialen Existenzmengen bester Coapproximation genau die abgeschlossenen Intervalle.

Für $T \subseteq K \subseteq X$ sagen wir, K habe die Durchschnittseigenschaft bzgl. T (in X), wenn jede Familie abgeschlossener Kugeln mit Mittelpunktsmenge T , die in X nicht-leeren Durchschnitt hat, auch in K nichtleeren Durchschnitt besitzt. Für einpunktiges T hat K trivialerweise die Durchschnittseigenschaft bzgl. T in X .

BEMERKUNG 1.2: Sei $T' \subseteq T \subseteq K$. Wenn K die Durchschnittseigenschaft bzgl. T in X besitzt, so besitzt K auch die Durchschnittseigenschaft bzgl. T' in X .

BEWEIS: Sei $\{B(t, \rho_t) : t \in T'\}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln mit nichtleerem Durchschnitt D in X und $x \in D$. Wir definieren die Kugelfamilie $\{B(t, \tilde{\rho}_t) : t \in T'\}$ durch

$$\tilde{\rho}_t = \rho_t \quad \text{für } t \in T'$$

$$\tilde{\rho}_t = \|x - t\| \quad \text{für } t \in T \setminus T'$$

Wegen

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq K \cap \bigcap \{B(t, \tilde{\rho}_t) : t \in T\} \subseteq \\ &\subseteq K \cap \bigcap \{B(t, \rho_t) : t \in T'\} \end{aligned}$$

hat K die Durchschnittseigenschaft bzgl. T' in X . //

PROPOSITION 1.3: In jeder Menge $K \subseteq X$ existieren maximale Teilmengen bezüglich derer K in X die Durchschnittseigenschaft hat.

BEWEIS: Sei $\{T_i : i \in I\}$ eine aufsteigende Familie von Teilmengen in K bzgl. derer K die Durchschnittseigenschaft in X besitzt. Sei $\mathcal{B}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln mit Mittelpunktmenge $U\{T_i : i \in I\}$, die in X nichtleeren Durchschnitt hat. Sei $\mathcal{B}_i$ die Einschränkung von $\mathcal{B}$ auf die Mittelpunktmenge T_i . Die Kugeln aus $\mathcal{B}_i$ haben nichtleeren Schnitt in X . Also ist

$$D_i \equiv K \cap \bigcap \{K' : K' \in \mathcal{B}_i\}$$

nicht leer. Außerdem sind die D_i kompakt und monoton fallend. Daher ist

$$\bigcap \{D_i : i \in I\} = K \cap \bigcap \{K' : K' \in \mathcal{B}\}$$

nicht leer. //

Existenzmengen bester Coapproximation zeigen nun bezüglich dieser Eigenschaft ein "extremales" Verhalten:

BEMERKUNG 1.4: K ist genau dann eine Existenzmenge bester Coapproximation in X , wenn K die Durchschnittseigenschaft bezüglich sich selbst in X besitzt.

Wir sagen, K habe die Durchschnittseigenschaft vom Grad α , wenn K bzgl. jeder Teilmenge der Mächtigkeit α die Durchschnittseigenschaft in X besitzt.

Eine Normstrecke zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ ist eine Jordankurve der Länge $\|x-y\|$ zwischen x und y . Eine Teilmenge K von X heißt normkonvex, wenn sich je zwei Punkte aus K durch eine Normstrecke in K verbinden lassen.

PROPOSITION 1.5: Für eine abgeschlossene Teilmenge K von X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) K hat die Durchschnittseigenschaft vom Grad 2.
- (b) K ist normkonvex.

BEWEIS: "(a) $\Rightarrow$ (b)": Sei $k, k' \in K$ und $z \in X$ mit

$$\|k-z\| + \|z-k'\| = \|k-k'\| \quad .$$

Dann existiert wegen (a) ein $\bar{k} \in K$ mit

$$\|k-\bar{k}\| + \|\bar{k}-k'\| = \|k-k'\| \quad .$$

Damit ist K normkonvex [13, S.29].

"(b) $\Rightarrow$ (a)": Sei $k, k' \in K$ und $\rho, \rho' > 0$, so daß

$$D \equiv B(k, \rho) \cap B(k', \rho')$$

nicht leer ist. O.B.d.A. enthalte D keinen der Mittelpunkte. Sei $x \in D$. Dann schneidet $B(k, \|x-k\|)$ die Strecke zwischen k und k' in einem Punkt z . Es existiert eine Normstrecke in K , welche k und k' verbindet. Diese Normstrecke enthält einen Punkt $\bar{k}$ mit

$$\|k-\bar{k}\| = \|k-z\|$$

und

$$\|k'-\bar{k}\| = \|k'-z\|$$

[13, S.27]. Wegen

$$B(k, \|k-z\|) \subseteq B(k, \rho)$$

und

$$B(k', \|k'-z\|) \subseteq B(k', \rho')$$

ist

$$\bar{k} \in B(k, \rho) \cap B(k', \rho') \cap K \quad . \quad //$$

Mit Bemerkung 1.2 und 1.4 ergibt sich:

KOROLLAR 1.6: Jede Existenzmenge bester Coapproximation ist normkonvex.

Insbesondere ist bei striktkonvexer Norm jede Existenzmenge bester Coapproximation konvex. Mit der Frage, wann jede normkonvexe Menge schon Existenzmenge bester Coapproximation ist, werden wir uns in den Abschnitten 4 und 7 beschäftigen.

Wegen Bemerkung 1.2 definieren wir

$$h_X(K) = \sup \{ \alpha : K \text{ besitzt die Durchschnittseigenschaft vom Grad } \alpha \text{ in } X \}$$

als Durchschnittszahl von K in X .

Ein metrischer Raum habe die Schnitteigenschaft vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn jede Familie abgeschlossener Kugeln mit der Eigenschaft, daß je n dieser Kugeln nichtleeren Durchschnitt haben, nichtleeren Durchschnitt hat.

BEMERKUNG 1.7: Wenn ein metrischer Raum die Schnitteigenschaft vom Grad n hat, besitzt er auch die Schnitteigenschaft vom Grad $n+1$.

Deshalb definieren wir die Schnittzahl von K als

$$s_X(K) = \inf \{ n \in \mathbb{N} : K \text{ hat die Schnitteigenschaft vom Grad } n \}$$

Nach dem Satz von Helly ist $s_X(X) \leq \dim(X)+1$.

PROPOSITION 1.8: K ist genau dann eine Existenzmenge bester Coapproximation in X , wenn gilt:

$$s_X(K) \leq s_X(X) \leq h_X(K)$$

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei K o.B.d.A. eine nicht endliche Existenzmenge bester Coapproximation. Aus Bemerkung 1.4 ergibt sich also

$$h_X(K) - |K| > \dim(X)+1 > s_X(X)$$

Sei nun $\{B(k_i, \rho_i) : i \in I\}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln mit Mittelpunkten in K , so daß je $s_X(X)$ von ihnen nichtleeren Durchschnitt in K haben. Insbesondere ist

$$\bigcap \{B(k_i, \rho_i) : i \in I\} \neq \emptyset .$$

Sei x aus diesem Durchschnitt. Für $k \in R_K(x)$ haben wir

$$k \in \bigcap \{B(k_i, \rho_i) \cap K : i \in I\} .$$

Also ist

$$s_X(K) \leq s_X(X) .$$

"=": Wir betrachten die Kugelfamilie $\{B(k, \|x-k\|) : k \in K\}$. Wegen $h_X(K) > s_X(X)$ hat der Durchschnitt von je $s_X(X)$ dieser Kugeln nichtleeren Durchschnitt mit K . Aus $s_X(K) \leq s_X(X)$ folgt somit

$$R_K(x) = \bigcap \{B(k, \|x-k\|) \cap K : k \in K\} \neq \emptyset . \quad //$$

Ein zweiter Aspekt bei der Beschreibung von Existenzmengen bester Coapproximation ergibt sich aus der Darstellung

$$R_K(x) = \{k' \in K : \|k'-k\| \leq \|x-k\| \quad \forall k \in K\} .$$

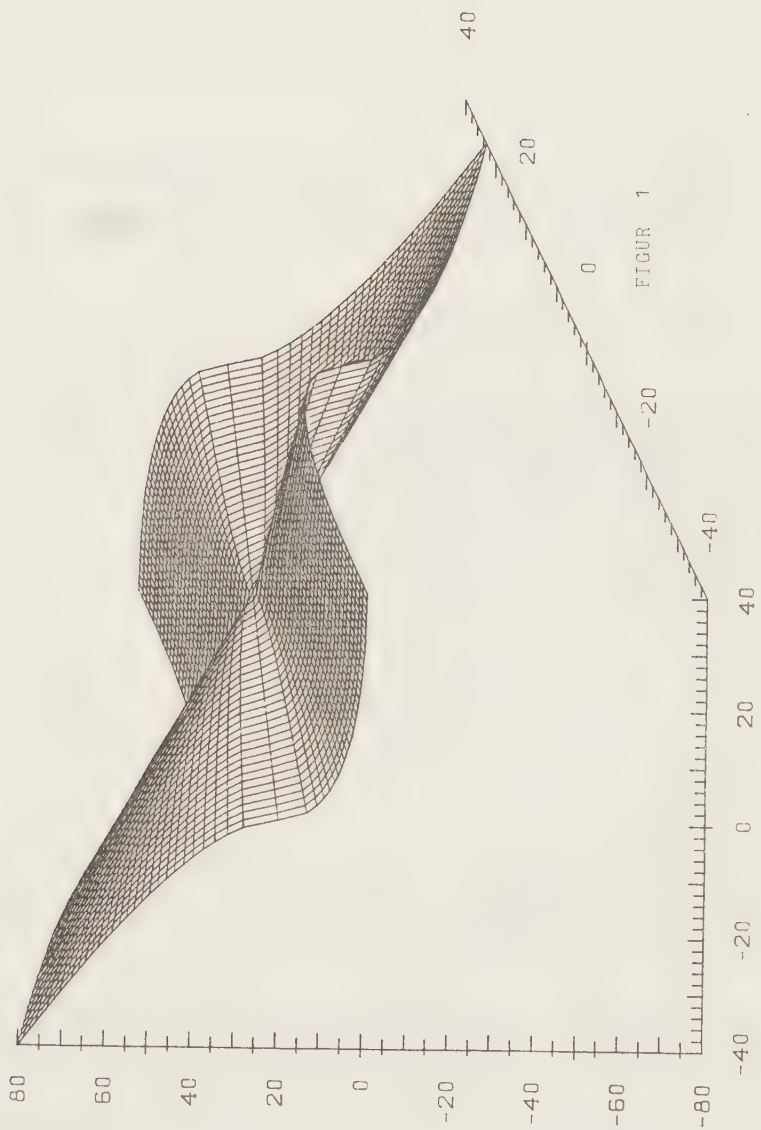
Hier geht wesentlich der geometrische Ort aller Punkte

$$E(x, y) = \{z \in X : \|x-z\| = \|y-z\|\}$$

ein, die von zwei gegebenen Punkten $x, y \in X$ gleichweit entfernt sind. Historische Gründe [22] rechtfertigen es, $E(x, y)$ als die Leibnizsche Ebene zu den Punkten x und y zu bezeichnen. Aus dem Satz von Mann [24] folgt, daß $E(x, y)$ genau dann für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eben ist, wenn X eine euklidische Norm trägt. Figur 1 zeigt eine Leibnizsche Ebene in $l_{1.5}^3$ zu zwei Punkten x, y , die punktsymmetrisch zum Ursprung auf der $l_{1.5}^3$ -Einheitskugel liegen, und deren Trägergerade durch die Polarwinkel $(45^\circ, 45^\circ)$ gegeben wird. Man erkennt die Punktsymmetrie von $E(x, y)$ bzgl. $(x+y)/2$. Außerdem sieht man, daß $E(x, y)$ eine Partition des Raumes liefert. Dabei heißt

$$E_x(x, y) = \{z \in X : \|x-z\| < \|y-z\|\}$$

der offene Leibnizsche Halbraum zu x und y , der x enthält.



Offenbar ist

$$B_K(x) = \{z \in X : K \subseteq \mathcal{C}E_x(x, z)\}$$

Damit erhalten wir:

BEMERKUNG 1.9: K ist genau dann Existenzmenge bester Coapproximation, wenn sich zu jedem $x \in X \setminus K$ ein $k \in K$ finden läßt, so daß x und K durch $\partial E_x(x, k)$ getrennt werden.

Bei striktkonvexer Norm ist $\partial E_x(x, y) = E(x, y)$.

BEMERKUNG 1.10: Das Komplement einer Existenzmenge bester Coapproximation enthält nur unbeschränkte Zusammenhangskomponenten. Insbesondere ist jede Existenzmenge bester Coapproximation einfach kurvenzusammenhängend.

BEWEIS: Wenn eine beschränkte Zusammenhangskomponente im Komplement der Existenzmenge bester Coapproximation K existiert, ist ein x hieraus durch kein $\partial E_x(x, k)$ mit $k \in K$ von K abzutrennen. //

BEMERKUNG 1.11: Sei $x \in X \setminus K$ und $R_K(x) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$k \in R_K(x + \lambda(x-k))$$

für alle $k \in R_K(x)$ und $\lambda > 0$.

BEWEIS: Wenn K von x durch $\partial E_x(x, k)$ getrennt wird, so wird erst recht $x + \lambda(x-k)$ durch $\partial E_{x+\lambda(x-k)}(x+\lambda(x-k), k)$ von K getrennt. //

Wir sagen, K sei leibnizkonvex, wenn K der Durchschnitt von Komplementen offener Leibnizscher Halbräume ist.

BEMERKUNG 1.12: Jede Existenzmenge bester Coapproximation ist leibnizkonvex.

BEWEIS: Sei K eine Existenzmenge bester Coapproximation und D der Durchschnitt aller Komplemente offener Leibnizscher Halbräume, welche K enthalten. Für ein $x \in D \setminus K$ finden wir ein $k \in R_K(x)$, so daß K in $\mathbb{C}E_x(x, k)$ liegt. Dies widerspricht der Definition von D . //

Wegen der speziellen Wahl von k aus K in Bemerkung 1.9 wird i.a. nicht jede leibnizkonvexe Menge auch Existenzmenge bester Coapproximation sein. Es gilt:

PROPOSITION 1.13: X ist genau dann euklidisch, wenn jede leibnizkonvexe Menge eine Existenzmenge bester Coapproximation ist.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Wenn X euklidisch ist, gilt $P_K \subseteq R_K$ für jede abgeschlossene, konvexe Teilmenge K von X .

" $\Leftarrow$ ": Jede Leibnizsche Ebene ist Existenzmenge bester Coapproximation und deshalb nach Korollar 1.6 normkonvex. Ein Resultat von Busemann [11] besagt, daß X in diesem Fall euklidisch ist. //

Durch

$$y \leq_K x \equiv \|y-k\| \leq \|x-k\| \quad \forall k \in K$$

wird eine reflexive und transitive Relation auf X definiert. Es gilt aber nur

$$y \leq_K x \wedge x \leq_K y \Leftrightarrow x = y \vee K \subseteq E(x, y) \quad .$$

Wir nennen K determinierend, wenn K in keiner Leibnizschen Ebene enthalten ist [20]. Dann ist jeder Punkt außerhalb von K durch die Menge seiner Entfernungen zu K eindeutig festgelegt. In diesem Fall liefert $\leq_K$ eine Ordnungsrelation.

$A: X \rightarrow X$ heißt quasikontraktiv, wenn für jeden Fixpunkt p von A gilt:

$$\|A(x)-p\| \leq \|x-p\| \quad \forall x \in X \quad .$$

Offenbar ist jede Existenzmenge bester Coapproximation ein quasikontrakatives Retrakt von X . Umgekehrt gilt:

PROPOSITION 1.14: Sei K Fixpunktmenge einer quasikon-
traktiven Abbildung von X in sich. Wenn K determinie-
rend ist, ist K eine Existenzmenge bester Coapproxima-
tion.

BEWEIS: Sei F_K eine quasikontraktive Abbildung von X in
sich, deren Fixpunktmenge K ist. Wir betrachten die nicht-
leere Menge $\mathcal{A}$ der quasikontraktiven Abbildungen von X in
sich, die K als Fixpunktmenge enthalten. Da K determi-
nierend ist, wird durch

$$F_1 \leq F_2 := F_1(x) \leq_K F_2(x) \quad \forall x \in X$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{A}$ definiert [3, S.47] . Bzgl.

$\leq$ ist $\mathcal{A}$ induktiv geordnet. Sei F_m ein minimales Ele-
ment von $\mathcal{A}$. Wegen $F_K \circ F_m \leq F_m$ ist $F_K \circ F_m = F_m$. Da-
mit liegt $F_m(X)$ in der Fixpunktmenge von F_K . //

Für Fixpunkte quasikontraktiver Abbildungen vergleiche man
[14] .

Nach [2] nennen wir ein $x \in X$ minimal im weiteren Sinn
bzgl. K , wenn für alle $y \in X$ mit $y \leq_K x$ gilt:

$$K \subseteq E(x, y)$$

bzw. minimal bzgl. K , wenn für alle $y \in X$ mit $y \leq_K x$
gilt:

$$x = y$$

Die Menge der minimalen Punkte bzgl. K bezeichnen wir mit
 $\min(K)$, die der minimalen Punkte im weiteren Sinn mit
 $\text{Min}(K)$. Offenbar ist $K \subseteq \min(K)$ und $\min(K) \subseteq \text{Min}(K)$. Bei
striktkonvexer Norm gilt $\min(K) = \text{Min}(K)$.

Minimale Punkte x bzgl. K sind genau die Punkte, die
sich durch keine Leibnizsche Ebene der Form $E(x, y)$ von K
abtrennen lassen. Gleichbedeutend damit ist $B_K(x) = \{x\}$.
Das folgende Lemma ist eine naheliegende Erweiterung von
Proposition 2 aus [2, S.109] :

LEMMA 1.15: Zu jedem $z \in X$ existiert ein minimaler Punkt

$x \in X$ im weiteren Sinn bzgl. K mit $x \leq_K z$.
 x ist minimal bzgl. K , wenn für jedes von x verschie-
 $y \in X$, für das $x-y$ parallel zu einer Seite von $B(0,1)$
ist, K nicht in $E(x,y)$ liegt.

Nach [2] heißt K optimal bzw. optimal im engeren Sinn, wenn $\min(K) = K$ bzw. $\text{Min}(K) = K$ gilt.

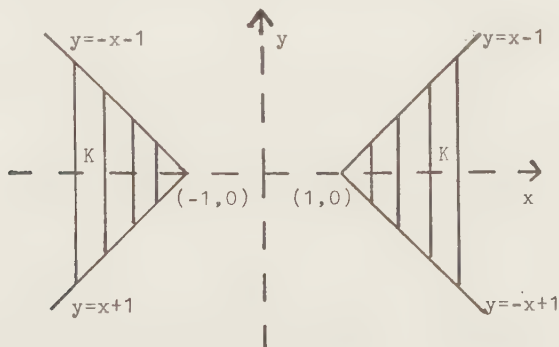
Offenbar ist jede im engeren Sinn optimale Menge auch optimal. Für striktkonvexe Normen fallen beide Begriffe zusammen.

PROPOSITION 1.16: K ist genau dann Existenzmenge bester Co-
approximation, wenn K optimal im engeren Sinn ist.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei $x \in \text{Min}(K)$. Für $k \in R_K(x)$ haben wir
 $k \leq_K x$ und damit $K \subseteq E(k,x)$. Liegt x außerhalb von K
 widerspricht dies $k \notin E(k,x)$.

" $\Leftarrow$ ": Sei nun K optimal im engeren Sinn. Zu jedem $x \in X$
 existiert nach Lemma 1.15 ein minimaler Punkt $z \in X$ im
 weiteren Sinn mit $z \leq_K x$. Da K optimal im engeren Sinn
 ist, gilt $z \in K$ und damit $R_K(x) \neq \emptyset$. //

In Figur 2 ist eine optimale Menge in l_∞^2 skizziert, die
 nicht optimal im engeren Sinn ist. Der Ursprung hat nämlich
 kein Element bester Coapproximation in K .



FIGUR 2

BEMERKUNG 1.17: Sei der Unterraum U Existenzmenge bester Coapproximation in X und K Existenzmenge bester Coapproximation in U . Dann ist K Existenzmenge bester Coapproximation in X .

BEMERKUNG 1.18: Eine Hyperebene von X ist genau dann Existenzmenge bester Coapproximation in X , wenn dies für einen der zugehörigen abgeschlossenen Halbräume gilt.

PROPOSITION 1.19: Der Abschluß einer aufsteigenden Familie von Existenzmengen bester Coapproximation in X ist wiederum eine Existenzmenge bester Coapproximation in X .

BEWEIS: Sei $\{K_i: i \in I\}$ eine aufsteigende Familie von Existenzmengen bester Coapproximation in X . Wir wählen x aus dem Komplement von $K \equiv \overline{\bigcup \{K_i: i \in I\}}$ und k_i aus $R_{K_i}(x)$. Wegen

$$\|k_i - x\| \leq 2 \cdot d_{K_i}(x) \leq 2 \cdot d_{K_1}(x)$$

dürfen wir annehmen, daß die k_i gegen ein $k' \in K$ konvergieren. Für festes $k \in \bigcup \{K_i: i \in I\}$ existiert ein $i_k \in I$ mit $k \in K_{i_k}$. Deshalb ist

$$\|k_i - k\| \leq \|x - k\|$$

für alle $i \in I$ mit $K_i \supseteq K_{i_k}$. Also gilt $k' \in R_K(x)$. //

Wie das Beispiel

$$K_i = \overline{\text{co}} \{(0,0), (0,1), (i,0)\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

in der euklidischen Ebene zeigt, kann in Proposition 1.19 i.a. nicht auf den Abschluß verzichtet werden,

Wenn K eine Existenzmenge bester Coapproximation ist, die den Ursprung enthält, ist $\{\lambda K: \lambda > 0\}$ wieder eine Existenzmenge bester Coapproximation.

Durch $\{(\lambda, |\lambda|): \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{(\lambda, 1-|\lambda|): \lambda \in \mathbb{R}\}$ werden zwei Existenzmengen bester Coapproximation in l_∞^2 gegeben, deren Schnitt nicht normkonvex und damit keine Exis-

tenzmenge bester Coapproximation ist. Selbst wenn man zwei Hyperteilräume schneidet, die Existenzmengen bester Coapproximation sind, ist der Schnitt i.a. nicht wieder eine Existenzmenge bester Coapproximation. Dies zeigt das folgende aus [28] adaptierte Beispiel.

BEISPIEL 1.20: Sei H ein Hyperteilraum von $\mathbb{R}^3$, $1 < p < 2$, der keine Existenzmenge bester Coapproximation ist. Weiter sei N das orthogonale Komplement von H bzgl. der euklidischen Norm und S die Projektion des $\mathbb{R}^3$ längs N auf H . Durch

$$\|(u, v, h)\| \equiv \max(\|u+h\|_2, \|v+h\|_p)$$

wird eine nicht striktkonvexe Norm auf $E \equiv N \times N \times H$ definiert. Sei

$$H_1 \equiv \{(0, v, h) : v \in N, h \in H\}$$

und

$$H_2 \equiv \{(v, v, h) : v \in N, h \in H\}$$

Beides sind Hyperteilräume in E . Sei $P_1: E \rightarrow H_1$ durch $(u, v, h) \rightarrow (0, v, h)$ definiert. Wegen $u \in \ker(S)$ und $\|S\|_2 = 1$ haben wir

$$\|h\|_2 = \|S(h+u)\|_2 \leq \|S\|_2 \cdot \|h+u\|_2 = \|h+u\|_2,$$

also

$$\begin{aligned} \|P_1((u, v, h))\| &= \max(\|h\|_2, \|v+h\|_p) \leq \\ &\leq \max(\|u+h\|_2, \|v+h\|_p) = \|(u, v, h)\| \end{aligned}$$

Also ist H_1 Existenzmenge bester Coapproximation.

Sei $P_2: E \rightarrow H_2$ durch $(u, v, h) \rightarrow (v, v, h)$ definiert. Wegen $\|v+h\|_2 \leq \|v+h\|_p$ folgt

$$\|P_2((u, v, h))\| = \|v+h\|_p \leq \|(u, v, h)\|$$

Also ist H_2 Existenzmenge bester Coapproximation.

Nehmen wir nun an, daß

$$H_3 \equiv H_1 \cap H_2 = \{(0, 0, h) : h \in H\}$$

Existenzmenge bester Coapproximation in E ist. Für x aus $\mathbb{R}^3 \setminus H$ haben wir die Darstellung $x = h' + u$ mit $u \in N \setminus \{0\}$ und $h' \in H$. Es existiert ein $(0, 0, h_0) \in H_3$ mit

$$\|(0, 0, h_0) - (0, 0, h)\| \leq \|(u, u, h') - (0, 0, h)\|$$

für alle $(0,0,h) \in H_3$. Dann ist aber

$$\|h_0 - h\|_p < \|x - h\|_p$$

für alle $h \in H$. Damit wäre H Existenzmenge bester Co-
approximation in l_p^3 . //

Für eine striktkonvexe Norm kann man allerdings zeigen
(vgl. [2]):

PROPOSITION 1.21: Sei X striktkonvex. Dann ist der Schnitt einer Familie von Existenzmengen bester Coapproximation wieder eine Existenzmenge bester Coapproximation.

BEWEIS: Sei $\{K_i : i \in I\}$ eine Familie von Existenzmengen bester Coapproximation, die nichtleeren Durchschnitt K haben. Für $x \in \min(K)$ und $y \leq_{K_i} x$ ist $y \leq_K x$, also $y = x$. Damit ist $x \in \min(K_i) = K_i$. //

2. Sonnen und Cosonnen

$K \subseteq X$ heißt eine strikte Sonne, wenn für jedes x aus $X \setminus K$ und für alle $k \in P_K(x)$ gilt:

$$[k, x] \subseteq P_K^{-1}(k) \quad ,$$

eine Sonne, wenn für jedes $x \in X \setminus K$ ein $k \in P_K(x)$ existiert, so daß

$$[k, x] \subseteq P_K^{-1}(k)$$

gilt.

Der Abstiegskegel zu $k, x \in X$ ist durch

$$C(k, x) = \{z \in X: \langle k-z, x-k \rangle_s < 0\}$$

definiert. $C(k, x)$ ist ein offener, konvexer Kegel mit k als Spitze. Er hat auch die Darstellung:

$$C(k, x) = \bigcup \{B(k + \lambda(x-k), \lambda \|x-k\|) : \lambda > 0\} \quad .$$

K ist offenbar genau dann eine Sonne, wenn zu jedem x aus $X \setminus K$ ein $k \in P_K(x)$ existiert, so daß

$$C(k, x) \cap K = \emptyset$$

ist.

Eine andere Beschreibung von Sonnen, lautetet [4] :

SATZ 2.1: K ist genau dann eine Sonne, wenn $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ surjektiv ist.

Offenbar gilt:

BEMERKUNG 2.2: Äquivalent sind:

- (a) $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ ist surjektiv für alle $\lambda \in (0, 1)$.
- (b) $I + \lambda P_K$ ist surjektiv für alle $\lambda > 0$.

Aus einem Ergebnis von Vlasov ([26], Theorem 3.6 a) ergibt sich folgende Abschwächung von Satz 2.1:

SATZ 2.3: Wenn $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für ein $\lambda \in (0, 1)$ surjektiv

ist, existiert für jedes $x \in X \setminus K$ und alle $k \in P_K(x)$
ein $u \in \partial B(0,1)$, so daß

$$x + \lambda u \in P_K^{-1}(k) \quad \forall \lambda \geq 0$$

gilt.

In Analogie zur besten Approximation (vgl. Bemerkung 1.11) nennen wir eine Existenzmenge bester Coapproximation K eine strikte Cosonne, wenn für jedes $x \in X \setminus K$ und alle $k \in R_K(x)$ gilt:

$$[k, x] \subseteq R_K^{-1}(k) \quad ,$$

eine Cosonne, wenn für alle $x \in X \setminus K$ ein $k \in R_K(x)$ existiert, so daß

$$[k, x] \subseteq R_K^{-1}(k)$$

gilt.

Wir erhalten als Analogon zu Satz 2.1 bei der besten Coapproximation:

SATZ 2.4: K ist genau dann eine Cosonne, wenn $\lambda I + (1-\lambda)R_K$
für alle $\lambda > 1$ surjektiv ist.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei $y \in X \setminus K$ und $\lambda > 1$. Es existiert ein $k \in R_K(y)$ mit $[k, y] \subseteq R_K^{-1}(k)$. Man wähle

$$x = (1/\lambda)y + (1 - (1/\lambda))k \quad .$$

Dann ist $k \in R_K(x)$ und wir haben

$$y = \lambda x + (1-\lambda)k \quad .$$

" $\Leftarrow$ ": Sei $x \in X \setminus K$. Für jedes $n \geq 2$ existiert (x_n, k_n) aus R_K mit

$$x = nx_n + (1-n)k_n \quad .$$

Wegen Bemerkung 1.11 ist $k_n \in R_K(x)$. Außerdem haben wir

$$x_n - k_n \rightarrow 0 \quad .$$

Wir dürfen annehmen, daß (k_n) gegen ein $k_0 \in R_K(x)$ kon-

vergiert. Sei $\sigma \in (0,1)$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \|k_0 - k\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|k_n - k\| < \\ &< \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(1-\sigma)x_n + \sigma x - k\| = \\ &= \|(1-\sigma)k_0 + \sigma x - k\| \end{aligned}$$

für alle $k \in K$.

//

BEMERKUNG 2.5: Äquivalent sind:

(a) $\lambda I + (1-\lambda)R_K$ ist surjektiv für alle $\lambda > 1$.

(b) $I - \lambda R_K$ ist surjektiv für alle $\lambda > 0$.

Die Rolle von $I + \lambda P_K$ bei der besten Approximation wird also im Fall der besten Coapproximation von $I - \lambda R_K$ übernommen.

PROPOSITION 2.6: Der Abschluß der Vereinigung einer aufsteigenden Familie von Cosonnen ist eine Cosonne.

BEWEIS: Sei $\{K_i: i \in I\}$ eine aufsteigende Familie von Cosonnen, $K = \overline{\bigcup \{K_i: i \in I\}}$ und $x \notin K$. Es existieren k_i aus $R_{K_i}(x)$ mit

$$\|k_i - k\| \leq \|k_i + \lambda(x - k_i) - k\|$$

für alle $k \in K_i$ und $\lambda > 0$. Wir dürfen annehmen, daß die k_i gegen ein $k' \in K$ konvergieren. Sei $\lambda > 0$ und k aus $\bigcup \{K_i: i \in I\}$ fest gewählt. Es existiert ein $i_0 \in I$ mit

$$\|k_i - k\| \leq \|k_i + \lambda(x - k_i) - k\|$$

für alle $i \in I$ mit $K_i \supseteq K_{i_0}$. Deshalb ist

$$\|k' - k\| \leq \|k' + \lambda(x - k') - k\|$$

für alle $\lambda > 0$ und $k \in \bigcup \{K_i: i \in I\}$. Insbesondere gilt

$$k' \in R_K(k' + \lambda(x - k'))$$

für alle $\lambda > 0$.

//

BEMERKUNG 2.7: Für $k, x, z \in X$ sind äquivalent:

$$(a) \quad \|z-k\| \leq \|z+\lambda(x-z)-k\| \quad \forall \lambda > 0$$

$$(b) \quad \langle x-z, z-k \rangle_s > 0$$

$A: X \rightarrow X$ heißt orthogonal bzgl. K , wenn

$$\langle x-A(x), A(x)-k \rangle_s > 0$$

für alle $k \in K$ gilt.

Die Menge der zu K orthogonalen Abbildungen faßt man im Browderschen Approximationsbereich zusammen. Dieser ist durch

$$A_K(x) = \{z \in X: \langle x-z, z-k \rangle_s > 0 \quad \forall k \in K\}$$

gegeben (vgl. [8]).

BEMERKUNG 2.8: K ist genau dann eine Cosonne, wenn

$$A_K(x) \cap K \neq \emptyset$$

für alle $x \in X$ gilt.

$A_K(x)$ ist für eine glatte Norm höchstens einpunktig [8].
Wegen Bemerkung 2.7 gilt:

$$A_K(x) \subseteq B_K(x)$$

d.h.

$$A_K(x) \cap K \subseteq R_K(x)$$

Wir greifen eine Idee von Vlasov [26] auf, um zu zeigen:

SATZ 2.9: Wenn R_K konvexwertig ist, ist K eine Cosonne.

BEWEIS: Sei $x_0 \in X \setminus K$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$F_\varepsilon(x) = x_0 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + d_K(x)}(x_0 - R_K(x))$$

für $x \in X$. Die Kugel $B(x_0, \varepsilon)$ wird durch F_ε in sich abgebildet. Außerdem ist $F_\varepsilon(x)$ nicht leer, kompakt und konvex. Zusammen mit der Oberhalbstetigkeit von F_ε ergibt

sich aus dem Fixpunktsatz von Kakutani die Existenz eines Fixpunktes y_ϵ von F_ϵ in der Kugel $B(x_0, \epsilon)$. Insbesondere haben wir für geeignetes $k_\epsilon \in R_K(y_\epsilon)$:

$$y_\epsilon = \frac{2d_K(y_\epsilon)}{\epsilon + 2d_K(y_\epsilon)} x_0 + \frac{\epsilon}{\epsilon + 2d_K(y_\epsilon)} k_\epsilon .$$

Wegen $k_\epsilon \in R_K(x_0)$ ist $\{k_\epsilon: \epsilon > 0\}$ beschränkt. Da y_ϵ eine Konvexkombination von x und k_ϵ ist, folgt die Beschränktheit von $\{y_\epsilon: \epsilon > 0\}$ und damit auch die von $\{d_K(y_\epsilon): \epsilon > 0\}$. Für hinreichend großes ϵ wird also

$$2d_K(y_\epsilon)/(\epsilon + 2d_K(y_\epsilon))$$

beliebig klein. Mit Satz 2.4 folgt die Behauptung. //

Das Fixpunktargument von Satz 2.9 bleibt gültig, wenn $R_K(x)$ für alle $x \in X$ azyklisch ist. Man behalte dabei im Auge, daß $R_K(x)$ sich als Schnitt der normkonvexen Menge K und der konvexen Menge $B_K(x)$ ergibt, also eine in gewissem Sinne "einfache topologische" Struktur besitzt. Insbesondere ist $R_K(x)$ konvex, wenn X striktkonvex ist. Damit erhalten wir:

KOROLLAR 2.10: Sei X striktkonvex. Dann ist jede Existenzmenge bester Coapproximation eine Cosonne.

Dies verdeutlicht, wie einschränkend doch die Existenzforderung bei bester Coapproximation ist.

Da für eine glatte Norm $A_K(x) \cap K$ höchstens einelementig und jede strahlenförmige orthogonale Retraktion von X auf K sogar kontraktiv ist, ergibt sich sehr einfach eine Verschärfung des Resultates von Beauprez aus [3]:

KOROLLAR 2.11: Sei X striktkonvex und glatt. Zu einer Existenzmenge bester Coapproximation K in X gibt es genau eine strahlenförmige und kontraktive Retraktion von X auf K , nämlich $A_K \cap K$.

3. Leibnizsche Ebenen und Schattenkegel

Wir untersuchen zunächst das Stetigkeitsverhalten der Abbildung $E: X \times X \rightarrow 2^X$, die zwei Punkten $x, y \in X$ deren Leibnizsche Ebene zuordnet. Figur 3 zeigt das Verhalten von Leibnizgeraden in $l_{1.5}^2$, deren definierende Punkte symmetrisch zum Ursprung auf dem $l_{1.5}^2$ -Einheitskreis liegen und sich gegen die x - bzw. die y -Achse häufen.

Wegen der Unbeschränktheit von $E(x, y)$ hat man den Stetigkeitsbegriff für E geeignet anzugeben:
 E heißt oberhalbstetig bzw. unterhalbstetig in einem Punkt $(x, y) \in X \times X$, wenn

$$E \cap B\left(\frac{x+y}{2}, \rho\right)$$

für alle $\rho > 0$ in (x, y) oberhalb- bzw. unterhalbstetig ist. E heißt stetig, wenn E in diesem Sinn oberhalb- und unterhalbstetig ist.

SATZ 3.1: (a) E ist oberhalbstetig auf $X \times X$

(b) E ist stetig in (x, y) , wenn $x-y$ nicht parallel zu einer Seite von $B(0, 1)$ ist.

BEWEIS: "(a)": Die Oberhalbstetigkeit von E ergibt sich unmittelbar aus der Stetigkeit der Gleichheitsbeziehung, welche $E(x, y)$ definiert.

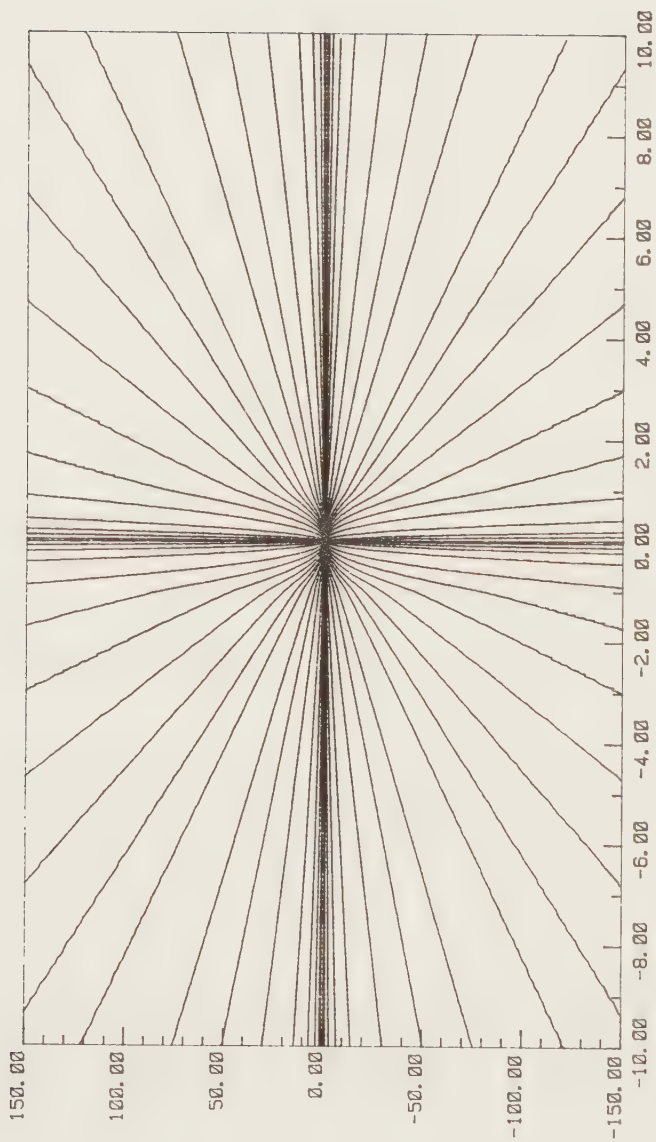
"(b)": Sei $x-y$ nicht parallel zu einer Seite von $B(0, 1)$. Insbesondere ist $x \neq y$. Weiter sei $\rho > 0$. Wir setzen

$$B_\rho = B\left(\frac{x+y}{2}, \rho\right)$$

Sei G eine offene Menge in X mit

$$(E(x, y) \cap B_\rho) \cap G \neq \emptyset$$

Sei v aus diesem Durchschnitt. Wegen der Offenheit von G dürfen wir annehmen, daß v im Inneren von $G \cap B_\rho$ liegt. Die Strecke zwischen x und y ist eine Sehne der Kugel $B(v, \|v-x\|)$, die nicht im Rand dieser Kugel liegt. Folglich schneidet die Gerade durch x' und y' für (x', y') aus einer hinreichend kleinen Umgebung von (x, y) die Kugel



FIGUR 3

$B(v, \|v-x\|)$ in den Punkten x^* und y^* . Man setze

$$a = v + \frac{\|x'-y'\|}{\|x^*-y^*\|}(x^*-v)$$

und

$$b = v + \frac{\|x'-y'\|}{\|x^*-y^*\|}(y^*-v)$$

Dann ist $a-b$ parallel zu $x'-y'$. Außerdem gilt:

$$\|a-b\| = \|x'-y'\|$$

Der Translationsvektor, der a in x' und b in y' überführt, lautet:

$$c = (x'-v) - \frac{\|x'-y'\|}{\|x^*-y^*\|}(x^*-v)$$

Insbesondere wird c beliebig klein, wenn (x',y') hinreichend nahe an (x,y) liegt. Außerdem ist

$$v+c \in E(x',y')$$

Da v im Inneren von $B_\rho \cap G$ liegt, gilt

$$(E(x',y') \cap B_\rho) \cap G \neq \emptyset$$

für (x',y') aus einer hinreichend kleinen Umgebung von (x,y) . //

Wir wollen diese Stetigkeitsaussage verwenden, um B_K eingehender zu beschreiben.

Für Teilmengen K und T von X ist die minimale Entfernung von T zu K durch

$$a_K(T) = \inf \{d_T(k) : k \in K\}$$

gegeben.

LEMMA 3.2: Sei K kompakt. Dann ist a_K stetig auf dem Raum der kompakten Teilmengen von X versehen mit der Hausdorffmetrik.

BEWEIS: Sei $\{T_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge kompakter Mengen, die gegen ein kompaktes T in der Hausdorffmetrik d_0 konvergiert. Weiter sei $\{k_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine gegen $k \in K$ konvergente Folge von Punkten aus K mit

$$a_K(T_n) \geq d_{T_n}(k_n) - (1/n) \quad .$$

Wegen

$$d_0(T, T_n) = \sup \{ |d_T(x) - d_{T_n}(x)| : x \in X \}$$

ist

$$d_{T_n}(k_n) \geq d_T(k_n) - d_0(T, T_n) \quad .$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_K(T_n) &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{T_n}(k_n) \geq \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_T(k_n) &= d_T(k) \geq a_K(T) \end{aligned} \quad .$$

Sei weiter $\{k_m: m \in \mathbb{N}\}$ eine Folge aus K mit

$$d_T(k_m) \rightarrow a_K(T)$$

für $m \rightarrow +\infty$. Wegen

$$d_{T_n}(k_m) \leq d_T(k_m) + d_0(T, T_n)$$

haben wir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_K(T_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} d_{T_n}(k_m) \leq d_T(k_m) \quad ,$$

also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_K(T_n) \leq a_K(T) \quad . \quad //$$

LEMMA 3.3: Seien x, y, z kollineare Punkte aus X , so daß z zwischen x und y liegt. Dann ist

$$\partial E_x(x, z) \cap \partial E_x(x, y) = \emptyset \quad .$$

BEWEIS: Sei $u \in \partial E_x(x, z)$. Dann hat $B(u, ||u-x||)$ mit der Geraden durch x und y genau die Strecke zwischen x und z gemein. u kann also nicht in $E(x, y)$ liegen. //

Insbesondere haben wir bei dieser Lage der Punkte:

$$\overline{E_x(x, z)} \subseteq \overline{E_x(x, y)} \quad .$$

Sei K kompakt. x ist ein Extrempunkt von $B_K(x)$.
 Ein von x ausgehender Strahl schneide $\partial B_K(x)$ in $y \neq x$.
 Wegen Lemma 3.3 ist y unter allen Punkten auf diesem
 Strahl dadurch ausgezeichnet, daß K im Komplement von
 $E_x(x,y)$ liegt und K gleichzeitig von $\partial E_x(x,y)$ gestützt
 wird. Für eine striktkonvexe Norm lassen sich diese Aussa-
 gen noch verschärfen:

PROPOSITION 3.4: Sei X striktkonvex, $K \subseteq X$ kompakt und
 $x \in X$ nicht minimal bzgl. K . Dann ist $B_K(x)$ ein kom-
pakter, konvexer Körper. Es gilt

$$\text{int } B_K(x) = \{z \in X: E_x(z,x) \cap K = \emptyset\}$$

und

$$\partial B_K(x) = \{z \in X: E(z,x) \text{ stützt } K\}$$

BEWEIS: Sei $z \in X$ mit $E_x(z,x) \cap K = \emptyset$. Man wähle $\rho > 0$
 so groß, daß $B((x+z)/2, \rho)$ sowohl K als auch die Punkte
 aus $E(x,z)$ enthält, für die $a_K(E(x,z))$ angenommen wird.
 Mit Satz 3.1 und Lemma 3.2 ist

$$a_K(E_x(x, \cdot) \cap B(\frac{x+z}{2}, \rho))$$

stetig in z . Damit gilt

$$a_K(E_x(x, z') \cap B(\frac{x+z}{2}, \rho)) > 0$$

für alle z' aus einer hinreichend kleinen Umgebung von z .
 Also ist für solche z' :

$$E_x(x, z') \cap K = (E_x(x, z') \cap B(\frac{x+z}{2}, \rho)) \cap K = \emptyset.$$

Mit der Vorbemerkung ergibt sich die Behauptung. //

Sei V ein $(n-r)$ -dimensionaler Unterraum von X . Die
 $(n-r)$ -dimensionalen Stützebenen an $B(0,1)$ parallel zu V
 bilden einen Zylinder $Z(V)$. Man nennt

$$SG(V) = P(0,1) \cap Z(V)$$

die r -dimensionale Schattengrenze von $B(0,1)$ bzgl. V .

Wenn $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ eine Basis von V ist, schreiben

wir $SG(v_1, \dots, v_{n-r})$ statt $SG(V)$.

Der obere Rand der $(n-1)$ -dimensionalen Schattengrenze $SG(v)$ wird durch

$$SG^O(v) = \{z \in SG(v): z + \lambda v \notin SG(v) \quad \forall \lambda > 0\},$$

der untere Rand durch

$$SG^U(v) = \{z \in SG(v): z + \lambda v \notin SG(v) \quad \forall \lambda < 0\}$$

gegeben.

Wir ordnen $SG(V)$ den r -dimensionalen Schattenkegel

$$SK(V) = \{\lambda v: \lambda \geq 0, v \in SG(V)\}$$

zu.

Wenn $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ eine Basis von V ist, schreiben wir auch $SK(v_1, \dots, v_{n-r})$ statt $SK(V)$.

Figur 4 zeigt den zweidimensionalen Schattenkegel zu $v = (0.5, 0.5, \sqrt{2}/2)$ in $l_{1.5}^3$.

Für den $(n-1)$ -dimensionalen Schattenkegel $SK(v)$ können wir von einem oberen Rand

$$SK^O(v) = \{\lambda z: z \in SG^O(v), \lambda \geq 0\}$$

und einem unteren Rand

$$SK^U(v) = \{\lambda z: z \in SG^U(v), \lambda \geq 0\}$$

des Schattenkegels sprechen.

$SK(v)$ liefert zusammen mit dem oberen Halbraum

$$SK^+(v) = \{z = u + \lambda v: \lambda > 0, u \in SK^O(v)\}$$

und dem unteren Halbraum

$$SK^-(v) = \{z = u + \lambda v: \lambda < 0, u \in SK^U(v)\}$$

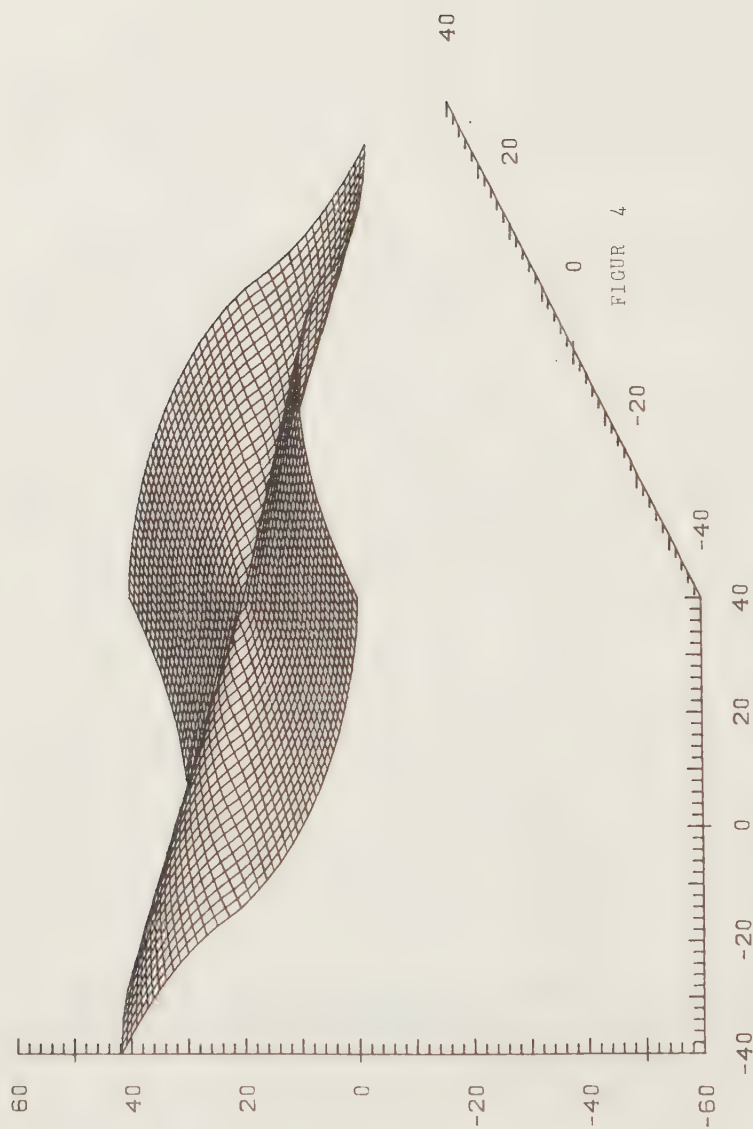
des Schattenkegels eine Partition des Raumes.

Aus der Definition von $SK(V)$ ergibt sich:

BEMERKUNG 3.5: $SK(V)$ ist der geometrische Ort aller Punkte in X , die den Ursprung als Element bester Approximation in V haben. Insbesondere ist

$$SK(V) = \{z \in X: z \perp V\} =$$

$$= \{z \in X: \langle V, z \rangle_S \geq 0\}.$$



Wir schreiben deshalb statt $SK(V)$ auch $V^\perp$.

LEMMA 3.6: Sei $v \in X$. Dann ist

$$SK^+(v) = \{z \in X: \langle -v, z \rangle_S < 0\}$$

und

$$SK^-(v) = \{z \in X: \langle v, z \rangle_S < 0\} .$$

BEWEIS: z liegt genau dann in $SK^+(v)$, wenn die konvexe Funktion $\|z - \lambda v\| - \|z\|$ ein negatives Minimum für positive Werte von λ annimmt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß sie für $\lambda = 0$ eine negative rechtseitige Ableitung besitzt.

Für $SK^-(v)$ betrachte man die Funktion $\|z + \lambda v\| - \|z\|$. //

Der Verlauf einer Leibnizschen Ebene läßt sich nun über den Verlauf des zugehörigen Schattenkegels eingrenzen:

PROPOSITION 3.7:

$$E(x, y) \subseteq \overline{C(x + SK^+(x-y))} \cap \overline{C(y + SK^-(x-y))} ,$$

d.h. $E(x, y)$ liegt echt zwischen $x + SK^0(x-y)$ und $y + SK^u(x-y)$.

BEWEIS: $(x+y)/2$ liegt zwischen $x + SK^0(x-y)$ und $y + SK^u(x-y)$. Sei z ein Schnittpunkt von $E(x, y)$ mit $x + SK^0(x-y)$. Nach Bemerkung 3.5 ist x ein Element bester Approximation von z in der Geraden durch x und y . Wegen

$$x + SK^0(x-y) \cap y + SK^u(x-y) = \emptyset$$

ist y kein Element bester Approximation von z in dieser Geraden. Dies ist unmöglich, denn x und y sind von z gleichweit entfernt. //

Damit erhalten wir:

KOROLLAR 3.8: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda v, 0) = SK(v)$.

SK^+ spielt bei Cosonnen eine analoge Rolle wie der Abstiegskegel bei Sonnen:

BEMERKUNG 3.9:

$$A_K(x) = \{z \in X: K \subseteq \mathbb{C}(z+SK^+(x-z))\} \quad .$$

Offenbar liegt $z \in X$ genau dann im Rand von $A_K(x)$, wenn $A_K(x)$ durch $z+SK^0(x-z)$ gestützt wird.

4. Existenzmengen bester Coapproximation in der Ebene

In diesem Abschnitt bezeichne X stets eine Ebene.
Über die quadratische, schiefsymmetrische Form

$$S(x, y) = y_1 x_2 - y_2 x_1$$

für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ordnen wir der gegebenen Norm die duale *-Norm

$$\|x\|^* = \sup \{S(x, y) : y \in B(0, 1)\}$$

zu. Alle sich auf diese Norm beziehenden Größen werden durch "*" gekennzeichnet. $B^*(0, 1)$ entsteht aus dem zu $B(0, 1)$ dualen Einheitskreis durch eine Drehung um 90° . Busemann [12] bemerkt, daß $B^*(0, 1)$ homothetisch zur Lösung des isoperimetrischen Problems in X ist, unter allen geschlossenen Kurven gegebener Minkowskilänge, diejenigen zu bestimmen, die die maximale Minkowskifläche begrenzen. Außerdem weist er in einem allgemeineren Zusammenhang darauf hin, daß

$$x \perp y \Leftrightarrow y \perp^* x$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

Allgemeiner kann man zeigen:

PROPOSITION 4.1:

$$\langle x, y \rangle_s \geq 0 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle_s^* \geq 0 \quad .$$

BEWEIS: Sei $x \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\langle x, y \rangle_s > 0$. Es ist

$$\|x + \lambda y\|^* = \sup \left\{ \frac{|S(x + \lambda y, y + \mu(x + \lambda y))|}{\|y + \mu(x + \lambda y)\|} : \mu \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\frac{|S(x, y)|}{\inf \{ \|y + \mu(x + \lambda y)\| : \mu \in \mathbb{R} \}}$$

und

$$\|x\|^* = \frac{|S(x, y)|}{\inf \{ \|y + \mu x\| : \mu \in \mathbb{R} \}}$$

für alle $x \in X$.

Sei $\lambda > 0$. Der Strahl $y + \mathbb{R}_+(x + \lambda y)$ verläuft in dem Winkel mit den Schenkeln $y + \mathbb{R}_+ y$ und $y + \mathbb{R}_+ x$. Wegen $\langle x, y \rangle_S > 0$ wird das Infimum von $\|y + \mu x\|$ in einem $\mu_0 < 0$ angenommen. Die Gerade $y + \mathbb{R}(x + \lambda y)$ schneidet die Strecke vom Ursprung zum Punkt $y + \mu_0 x$. Also gilt

$$\inf\{\|y + \mu(x + \lambda y)\| : \mu \in \mathbb{R}\} \leq$$

$$\inf\{\|y + \mu x\| : \mu \in \mathbb{R}\}$$

für alle $\lambda > 0$. Dann ist aber

$$\|x + \lambda y\|^* / \|x\|^* > 1$$

für alle $\lambda > 0$, d.h.

$$\langle y, x \rangle_S^* > 0.$$

//

Diese Aussage knüpft die beste Coapproximation in der Ebene eng an die beste Approximation in der dualen *-Norm.

BEMERKUNG 4.2:

$$C^*(0, x) = SK^+(x)$$

.

$$\text{BEWEIS: } C^*(0, x) = \{z \in X : \langle -z, x \rangle_S^* < 0\}$$

$$= \{z \in X : \langle x, -z \rangle_S < 0\}$$

$$= \{-z \in X : \langle x, z \rangle_S < 0\}$$

$$= -SK^-(x) = SK^+(x).$$

//

Damit haben wir

KOROLLAR 4.3: K ist genau dann eine Cosonne bzgl. $\|\cdot\|$, wenn K eine Sonne bzgl. $\|\cdot\|^*$ ist.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei $x \in X \setminus K$. Es existiert ein $k \in R_K(x)$ mit $k + SK^+(x - k) \cap K = \emptyset$. Wegen Bemerkung 4.2 ist

$$C^*(k, x) \cap K = \emptyset$$

.

" " $\Leftarrow$ ": Sei $x \in X \setminus K$.

//

Für $K \in X$, $x \in X \setminus K$ und $u \in \partial B(0,1)$ definieren wir

$$x(K,u) = x - d_K(x) \cdot u$$

und

$$W(K,x,u) = C(x(K,u), x)$$

$W(K,x,u)$ ist das Innere des konvexen Tangentialkegels an $B(x, d_K(x))$ mit Spitze in $x(K,u)$. Also ist der Rand dieses Tangentialkegels eine Gerade durch oder ein Winkel mit Scheitel in $x(K,u)$. Sei $\partial B(0,1)$ mit einem Umlaufsinn gegen den Uhrzeiger versehen. Dann können wir von einem linken bzw. rechten Schenkel $W_L(K,x,u)$ bzw. $W_R(K,x,u)$ und einem entsprechenden Durchlaufsinne von $\partial W(K,x,u)$ sprechen. Sei

$$S(K,x) = \{u \in \partial B(0,1) : K \cap W(K,x,u) = \emptyset\}$$

Wir können auch

$$S(K,x) = \{u \in \partial B(0,1) : P_K(x) \subseteq \partial W(K,x,u)\}$$

schreiben. Mit Satz 2.3 erhalten wir:

BEMERKUNG 4.4: Wenn $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für ein $\lambda \in (0,1)$ surjektiv ist, ist $S(K,x)$ für jedes $x \in X \setminus K$ nicht leer.

BEMERKUNG 4.5: Sei $x \in X \setminus K$, $u \in S(K,x)$ und $k \in P_K(x)$. Dann liegen k und $x(K,u)$ in derselben Seite von $B(x, d_K(x))$.

BEWEIS: $x(K,u)$ und k liegen in $\partial W(K,x,u) \cap B(x, d_K(x))$. Sei $k \neq x(K,u)$. Würde die Strecke zwischen k und $x(K,u)$ im Inneren von $B(x, d_K(x))$ verlaufen, müßten Punkte von $B^0(x, d_K(x))$ in $\overline{W(K,x,u)}$ liegen. //

Wenn $S(K,x)$ nicht leer ist, gibt es daher höchstens drei verschiedene Tangentialkegel an $B(x, d_K(x))$, welche $P_K(x)$ enthalten. Genauer gilt:

(1) Wenn $P_K(x)$ in keiner Seite von $B(x, d_K(x))$ liegt, ist $P_K(x)$ einelementig und

$$S(K,x) = \{(x - P_K(x)) / \|x - P_K(x)\|\}$$

Es gibt nur einen Tangentialkegel an $B(x, d_K(x))$, der $P_K(x)$ enthält, nämlich den mit Spitze in $P_K(x)$.

- (2) Wenn eine Seite von $B(x, d_K(x))$ Elemente aus $P_K(x)$ enthält, liegt $x(K, u)$ für alle $u \in S(K, x)$ in dieser Seite.

Wenn ein $x(K, u)$ im Inneren dieser Seite liegt, ist $\partial W(K, x, u)$ Trägergerade von $P_K(x)$, d.h. $P_K(x)$ liegt ganz in dieser Seite. Dann ist $S(K, x)$ die entsprechende antipodale Seite von $B(0, 1)$. Die Tangentialkegel an $B(x, d_K(x))$, welche $P_K(x)$ enthalten, sind also die Halbebene, welche die Trägergerade von $P_K(x)$ als Begrenzungsgerade hat, und die beiden Tangentialkegel mit Spitze in den Randpunkten der betreffenden Seite von $B_K(x, d_K(x))$.

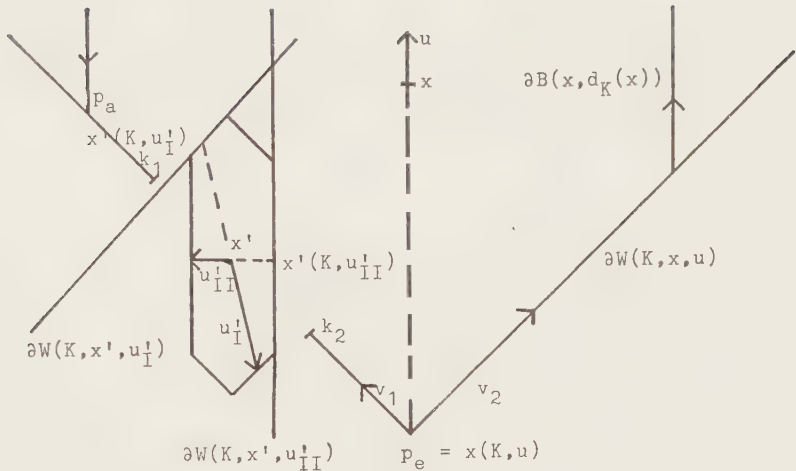
- (3) Die lineare Hülle von $P_K(x)$ kann auch zweidimensional sein, aber nur dann, wenn sich an die Seite von $B(x, d_K(x))$, welche Elemente aus $P_K(x)$ enthält, eine weitere Seite von $B(x, d_K(x))$ anschließt, welche ebenfalls Elemente aus $P_K(x)$ enthält. Es gibt dann genau einen Tangentialkegel an $B(x, d_K(x))$, welcher $P_K(x)$ enthält, nämlich den durch die beiden Seiten von $B(0, 1)$ vorgegebenen. $x(K, u)$ ist der Berührungspunkt beider Seiten und

$$S(K, x) = \{x(K, u)\}$$

LEMMA 4.6: Wenn $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für ein $\lambda \in (0, 1)$ surjektiv ist, ist $P_K(x)$ für jedes $x \in X$ in sich zusammenziehbar.

BEWEIS: Sei $x \in X \setminus K$. Wegen Bemerkung 4.4 ist $S(K, x) \neq \emptyset$. Wenn $P_K(x)$ einpunktig ist, haben wir nichts zu zeigen. Sei p_a der Anfangspunkt und p_e der Endpunkt einer Seite von $B(x, d_K(x))$, welche mehr als ein Element aus $P_K(x)$ enthält. Seien k_1 und k_2 Elemente von $P_K(x)$ in dieser Seite, so daß kein weiteres Element aus $P_K(x)$ zwischen ihnen auf dieser Seite liegt. Wir setzen

$$k = (k_1 + k_2)/2$$



FIGUR 5

Sei

$$u = (x - p_e) / \|x - p_e\|$$

Dann liegen k_1 und k_2 auf $W_1(K, x, u)$. Sei

$$v_1 = (p_a - p_e) / \|p_a - p_e\|$$

und v_2 der Richtungseinheitsvektor von $W_r(K, x, u)$. Es kann $v_1 = -v_2$ auftreten.

Sei $u' \in \partial B(0, 1)$. Wenn u' nach u und vor $-u$ auf $\partial B(0, 1)$ kommt, aber $u' \neq u$ ist, liegt k_1 in $W(K, x', u')$. Wenn u' nach $-u$ und vor u auf $\partial B(0, 1)$ kommt, aber $u' \neq -u$ ist, liegt k_2 in $W(K, x', u')$. Also ist $S(K, x')$ leer. Dies ist unmöglich, weil K eine α -Sonne ist. Folglich ist der Schnitt von $P_K(x)$ mit einer Seite von $B(x, d_K(x))$ zusammenhängend.

Wenn $P_K(x)$ in zwei einander berührenden Seiten von $B(x, d_K(x))$ liegt, ist $S(K, x) = \{v\}$ und $x(K, v)$ der Berührungspunkt dieser beiden Seiten. Nach Voraussetzung gibt es $(y, k_y) \in P_K$ mit

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) k_y$$

Deshalb ist $P_K(x) \subseteq P_K(y)$. Folglich gibt es nur einen

Tangentialkegel an $B(y, d_K(y))$, welcher $P_K(y)$ enthält, nämlich den, der die beiden Seiten von $B(y, d_K(y))$ enthält, die $P_K(x)$ enthalten. Dieser Tangentialkegel muß mit $\overline{W(K, x, v)}$ zusammenfallen. Folglich ist

$$y \in x + \mathbb{R}_+ v$$

d.h.

$$k_y = x(K, v)$$

Damit liegt der Scheitel von $\partial W(K, x, v)$ in $P_K(x)$. //

Für eine Sonne in der Ebene ist also $P_K(x)$ ein Punkt, eine Strecke oder ein kompaktes Winkelstück.

LEMMA 4.7: Sei $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für ein $\lambda \in (0,1)$ surjektiv. Weiter liege $P_K(x)$ für ein $x \in X \setminus K$ in einer Seite von $B(x, d_K(x))$ mit Anfangspunkt p_a und Endpunkt p_e . Die Trägergerade T dieser Seite trenne K nicht von x . Dann ist

$$S(K, x) = \{(x-p)/\|x-p\|\}$$

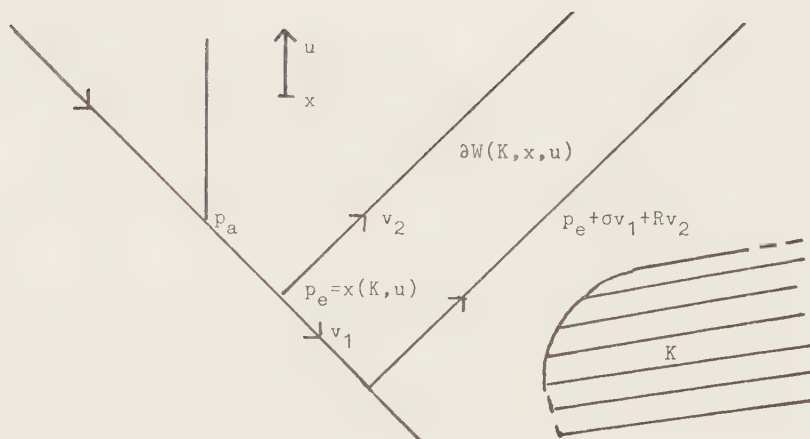
für genau ein $p \in \{p_a, p_e\}$ und es gilt

$$p \in P_K(x)$$

BEWEIS: Wäre $(x-p)/\|x-p\| \in S(K, x)$ für $p = p_a$ und $p = p_e$, oder gäbe es ein $u \in S(K, x)$, so daß $x(K, u)$ im relativen Inneren der Strecke zwischen p_a und p_e liegt, würde x durch T von K getrennt. Deshalb dürfen wir annehmen, daß $S(K, x) = \{u\}$ mit $u = (x-p_e)/\|x-p_e\|$ gilt. Sei

$$v_1 = \frac{p_e - p_a}{\|p_e - p_a\|}$$

und v_2 der Richtungseinheitsvektor von $W_r(K, x, u)$. Wäre p_e ein Glättepunkt von $B(x, d_K(x))$, würde x durch T von K getrennt. Also zeigt v_2 in die offene Halbebene zu T , welche x enthält. Weil x durch T nicht von K getrennt wird, und weil K nicht in $W(K, x, u)$ liegt, muß der



FIGUR 6

Winkel V mit dem Scheitel p_e und den Schenkeln $p_e + R_+ v_2$ bzw. $p_e + R_+ v_1$ auch Elemente aus K enthalten. Sei

$$\sigma_m = \sup \{ \sigma \in \mathbb{R} : p_e + \sigma v_1 + R_+ v_2 \cap K = \emptyset \}$$

$\sigma_m > 0$ ist endlich, weil Elemente aus K in V liegen. Wird σ_m nicht angenommen, liegen Elemente von K auf dem Schenkel $p_e + \sigma_m v_1 + R_+ v_2$. Man findet ein geeignetes $x' \in X$ und eine Kugel um x' , die p_a und $p_e + \sigma_m v_1$ als Anfangs- bzw. Endpunkt einer Seite enthält, und deren Inneres mit K leeren Schnitt hat. Nach Lemma 4.6 gehört dann p_e zu K und wir sind fertig.

σ_m werde also angenommen, d.h. $p_e + \sigma_m v_1 + R_+ v_2$ ist eine Asymptote an K . O.B.d.A. dürfen wir $\sigma_m = 0$ setzen. Nach Voraussetzung existiert ein $(y, k_y) \in P_K$ mit

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) k_y$$

Insbesondere ist $P_K(x) \subseteq P_K(y)$. Damit liegt T für alle $u' \in S(K, y)$ als Träger eines der Schenkel von $\partial W(K, y, u')$ fest. Insbesondere ist $y(K, u') \in T$ für alle $u' \in S(K, y)$. Außerdem muß y in der offenen Halbebene zu T liegen, welche x enthält, weil sonst x nicht im relativen Inneren der Strecke zwischen y und k_y liegen könnte.

Wenn ein $u' \in S(K, y)$ existiert, so daß $y(K, u')$ im relativen Inneren der Seite von $B(y, d_K(y))$ liegt, welche $P_K(x)$ enthält, liegt kein Element von K in der offenen Halbebene zu T , welche x enthält. Also würde x von K durch T getrennt. Sei t_a bzw. t_e der Anfangs- bzw. Endpunkt der Seite von $B(y, d_K(y))$, welche $P_K(x)$ enthält. Sei $u' \in S(K, y)$ mit $y(K, u') = t_a$. Weil t_a vor p_a auf T liegt, enthält $W(K, y, u')$ Elemente aus K . Dies ist unmöglich. Also bleibt nur

$$S(K, y) = \{(y - t_e) / \|y - t_e\|\} = \{u\}.$$

Wenn $y(K, u)$ vor p_e auf T liegt, kann x nicht in der Strecke zwischen y und k_y liegen, denn $W_r(K, y, u)$ enthält in diesem Fall keine Elemente aus K . Aber $y(K, u)$ kann auch nicht nach p_e auf T liegen, denn $p_e + \mathbb{R}_+ v_2$ ist Asymptote an K . Also muß

$$y(K, u) = p_e$$

sein. Dann liegt aber y in $x + \mathbb{R}_+ u$, was nur möglich ist, wenn $p_e = k_y$ gilt. //

Damit können wir das folgende Resultat von Berens zeigen, welches in [4] ohne Beweis angegeben wurde:

SATZ 4.8: Wenn $\lambda I + (1-\lambda)P_K$ für ein $\lambda \in (0, 1)$ surjektiv ist, ist K eine Sonne.

BEWEIS: Sei $x \in X \setminus K$. Wir müssen ein $k \in P_K(x)$ angeben, das $C(k, x) \cap K = \emptyset$ erfüllt:

- (1) $P_K(x)$ liege in keiner Seite von $B(x, d_K(x))$. Dann ist $P_K(x)$ einpunktig und $S(K, x) = \{(x - P_K(x)) / \|x - P_K(x)\|\}$, also $C(P_K(x), x) \cap K = \emptyset$.
- (2) $P_K(x)$ liege in einer Seite von $B(x, d_K(x))$ und die Trägergerade dieser Seite trenne K von x . Dann gilt $C(k, x) \cap K = \emptyset$ für jedes $k \in P_K(x)$.

- (3) $P_K(x)$ liege in einer Seite von $B(x, d_K(x))$ und die Trägergerade dieser Seite trenne K nicht von x . Nach Lemma 4.7 gibt es einen eindeutig bestimmten Randpunkt p der Strecke $P_K(x)$, so daß $S(K, x) = \{(x-p)/\|x-p\|\}$, also $C(p, x) \cap K = \emptyset$ gilt.
- (4) $P_K(x)$ sei ein Winkelstück mit Scheitel s . Dann ist $S(K, x) = \{(x-s)/\|x-s\|\}$, also $C(s, x) \cap K = \emptyset$. //

Wir hätten Satz 4.8 auch unmittelbar aus Lemma 4.6 über das Resultat von Vlasov ([26]) folgern können, daß Mengen, deren metrische Projektion azyklische Werte besitzt, stets Sonnen sind. In der Ebene schien jedoch ein elementargeometrisches Argument passender.

Betrachten wir nun die Menge

$$P_K^S(x) = \{k \in P_K(x) : [k, x] \subseteq P_K^{-1}(k)\}$$

der Lichtpunkte zu x (bzgl. K).

Offenbar ist K genau dann eine Sonne, wenn $P_K^S(x)$ für jedes $x \in X \setminus K$ nicht leer ist.

Sei nun K eine Sonne. Da P_K^S stetig ist, existiert nach dem Satzsatz von Michael zumindest ein stetiger Schnitt von P_K^S . Wir wollen jedoch eine Selektion von P_K^S mit wesentlich stärkeren Eigenschaften angeben. Für eine Sonne K ist $P_K^S(x)$ nämlich einelementig oder gleich $P_K(x)$. Dieses spezielle Verhalten von P_K^S bei Sonnen in der Ebene ermöglicht uns, die folgende strahlenförmige Selektion S_K von P_K^S zu konstruieren:

- (1) Wenn $P_K^S(x)$ einelementig ist, haben wir natürlich $S_K(x) := P_K^S(x)$ zu setzen. Wir müssen noch einsehen, daß diese Zuordnung strahlenförmig ist:
Für $x \in K$ ist nichts zu zeigen. Sei also $x \in X \setminus K$. Wir wählen ein beliebiges Element $y \in [S_K(x), x]$. Wenn $P_K(x)$ ein Winkelstück mit Scheitel s ist, ist auch $P_K(y)$ ein Winkelstück, das denselben Scheitel und dieselben Schenkel wie $P_K(x)$ besitzt. Also ist

$$P_K^S(y) = \{s\}.$$

Wenn $P_K(x)$ in einer Seite von $B(x, d_K(x))$ liegt, deren Trägergerade K und x nicht trennt, so liegt $P_K(y)$ auch auf dieser Trägergeraden. Wäre nämlich $P_K(y)$ ein Winkel, so müßte dies auch für $P_K(x)$ gelten. Nach Lemma 4.7 gibt es einen eindeutig bestimmten Randpunkt von $P_K(y)$, der Lichtpunkt zu y ist. Dieser Randpunkt kann nur $P_K^S(x)$ sein, weil sonst zwei verschiedene Lichtpunkte auf der Trägergeraden existieren würden. Diese müßte folglich x und K trennen. Also ist $P_K^S(y) = P_K^S(x)$.

Wenn $P_K(x)$ in einer Seite von $B(x, d_K(x))$ liegt, deren Trägergerade K und x trennt, ist $|P_K(x)|=1$, weil sonst $P_K^S(x)$ mehr als ein Element enthalten würde. $P_K(y)$ liegt stets in der Trägergeraden dieser Seite. Für y zwischen $P_K^S(x)$ und x ist $P_K(y) = P_K(x)$ und damit $P_K^S(x) = P_K^S(y)$. Wäre $P_K(y)$ für ein y aus $x + R_+(x - P_K^S(x))$ eine Strecke, so wäre auch $P_K(x)$ nicht einpunktig. Wir haben daher stets $P_K^S(x) = P_K^S(y)$. Wenn $P_K(x)$ in keiner Seite von $B(x, d_K(x))$ liegt, ist offenbar $P_K(y) = P_K(x)$.

- (2) Sei $P_K^S(x)$ nicht einelementig.

Dann ist $P_K(x) = P_K^S(x)$ eine Strecke. Indem wir die Orientierung von $B(x, d_K(x))$ übernehmen, können wir von einem linken bzw. rechten Randpunkt von $P_K(x)$ sprechen. Setzen wir $S_K(x)$ stets gleich dem linken Randpunkt von $P_K(x)$, wenn $P_K^S(x)$ mehr als ein Element enthält. Fällt $S_K(x)$ mit dem Randpunkt der Seite von $B(x, d_K(x))$ zusammen, die $P_K(x)$ enthält, ist $S_K(x)$ offenbar auch linker Randpunkt von $P_K(y)$. Liegt $S_K(x)$ im relativen Inneren dieser Seite, und wäre $S_K(x)$ für ein $y \in x + R_+(x - S_K(x))$ nicht linker Randpunkt von $P_K(y)$, würden wegen des Zusammenhangs von $P_K(y)$ Elemente aus K zwischen dem linken Randpunkt der Seite von $B(x, d_K(x))$, welche $P_K(x)$ enthält, und $S_K(x)$ liegen. Dies widerspricht der Definition von $S_K(x)$. Also ist $S_K(x) = S_K(y)$.

Die von uns gegebene Möglichkeit ist i.a. nicht die einzige, eine strahlenförmige Selektion der metrischen Projektion an eine Sonne in der Ebene zu konstruieren.

Bemerken wir weiter, daß jede strahlenförmige Selektion von P_K in der Ebene, insbesondere also S_K schon stetig ist. Wir wollen dies nicht im Detail ausführen, weil wir mit Ideen von Bruck ([8]) und von Karlovitz ([21]) schärfer das folgende Monotonieverhalten von S_K zeigen können:

SATZ 4.9: S_K ist stark kontraktiv bzgl. $\|\cdot\|^*$, d.h.

$$\|S_K(x) - S_K(y)\|^{*2} < \langle x - y, S_K(x) - S_K(y) \rangle_s^*$$

für alle $x, y \in X$.

BEWEIS: S_K ist nicht nur eine strahlenförmige, sondern wegen Bemerkung 4.2 auch eine bzgl. $\|\cdot\|^*$ orthogonale Retraktion. Es reicht zu zeigen, daß S_K bzgl. $\|\cdot\|^*$ kontraktiv ist. Aus der Strahlenförmigkeit von S_K folgt dann nämlich

$$\|S_K(x) + \sigma(x - S_K(x)) - (S_K(y) + \sigma(y - S_K(y)))\|^* > \|S_K(x) - S_K(y)\|^*,$$

also

$$(\|S_K(x) - S_K(y) + \sigma(x - y)\|^* - \sigma\|S_K(x) - S_K(y)\|^*)^2 \geq \|S_K(x) - S_K(y)\|^{*2},$$

d.h.

$$\frac{\|S_K(x) - S_K(y) + \sigma(x - y)\|^{*2} - \|S_K(x) - S_K(y)\|^{*2}}{2 \cdot \sigma} >$$

$$\|S_K(x) - S_K(y)\|^* \cdot \|S_K(x) - S_K(y) + \sigma(x - y)\|^* + (\sigma/2) \|S_K(x) - S_K(y)\|^{*2},$$

für alle $x, y \in X$ und $\sigma > 0$, also die starke Kontraktivität von S_K bzgl. $\|\cdot\|^*$.

Sei $x_1, x_2 \in X$. Für $S_K(x_1) = S_K(x_2)$ ist nichts zu zeigen. Für x_1 oder x_2 aus K folgt die Behauptung, weil K eine Cosonne bzgl. $\|\cdot\|^*$ ist. Wir dürfen also annehmen,

daß

$$x_1, x_2 \notin K, x_1 \neq x_2 \quad \text{und} \quad S_K(x_1) \neq S_K(x_2)$$

gilt.

K wird von $C(S_K(x_2), x_2)$ gestützt. Dieser Stützwinkel habe die Schenkel

$$W_1 \equiv \{S_K(x_2) + \sigma u_2 : \sigma > 0\}$$

und

$$W_2 \equiv \{S_K(x_2) + \sigma w_2 : \sigma > 0\}$$

Wir dürfen annehmen, daß $S_K(x_1)$ in der abgeschlossenen Halbebene zur Trägergeraden von W_2 liegt, welche x_2 nicht enthält. w_2 und $x_2 - S_K(x_2)$ sind linear unabhängig. Folglich gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$S_K(x_1) - S_K(x_2) = -\alpha_2 w_2 + \beta_2 (x_2 - S_K(x_2))$$

Die Funktion

$$F(\lambda) \equiv \|S_K(x_2) + \lambda(x_2 - S_K(x_2)) - S_K(x_1)\|^*$$

ist konvex in $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sei $\alpha_2 = 0$. Dann ist

$$F(\beta_2) = \|\alpha_2 w_2\|^* = 0$$

Wegen $F > 0$ nimmt die Funktion F ihr Minimum in β_2 an. Sei $\alpha_2 \neq 0$. Da w_2 in $SK^*(x_2 - S_K(x_2))$ liegt, gilt

$$w_2 \perp^* x_2 - S_K(x_2)$$

d.h. aber

$$F(\beta_2 + \sigma) = \|\alpha_2 w_2 + \sigma(x_2 - S_K(x_2))\|^* >$$

$$\|\alpha_2 w_2\|^* = F(\beta_2)$$

für alle $\sigma \in \mathbb{R}$. Also nimmt F stets in β_2 ein Minimum an.

Sei nun f ein lineares Funktional mit $f(w_2) = 0$ und

$$f(S_K(x_1)) < f(w_2) < f(x_2)$$

Dann haben wir

$$f(S_K(x_1)) - f(S_K(x_2)) =$$

$$-\alpha_2 f(w_2) + \beta_2 (f(x_2) - f(S_K(x_2)))$$

Wegen

$$f(S_K(x_1)) - f(S_K(x_2)) \leq 0,$$

$$f(x_2) - f(S_K(x_2)) > 0$$

und

$$f(w_2) = 0$$

ist $\beta_2 \leq 0$.

Analog folgt die Existenz eines $w_1 \in X$ und von $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$w_1 \perp^* x_1 - S_K(x_1),$$

$$S_K(x_2) - S_K(x_1) = -\alpha_1 w_1 + \beta_1 (x_1 - S_K(x_1))$$

und

$$\beta_1 \leq 0,$$

so daß die konvexe Funktion

$$G(\lambda) = \|S_K(x_1) + \lambda(x_1 - S_K(x_1)) - S_K(x_2)\|^*$$

in β_1 ein Minimum annimmt.

Wir folgen nun dem Beweis von Theorem 2 in [19]:

(1) Sei $\beta_1, \beta_2 < 0$:

Man wähle $v \in X$, so daß v parallel zu einer Tangente an $B^*(0,1)$ in

$$(S_K(x_1) - S_K(x_2)) / \|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^*$$

ist. Dann existiert ein lineares Funktional g mit

$$g(v) = 0$$

und

$$g\left(\frac{S_K(x_1) - S_K(x_2)}{\|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^*}\right) = 1.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} & \|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^* + \beta_1 g(x_1 - S_K(x_1)) = \\ & g(S_K(x_1) - S_K(x_2) + \beta_1 (x_1 - S_K(x_1))) \leq \\ & \|S_K(x_1) - S_K(x_2) + \beta_1 (x_1 - S_K(x_1))\|^* = G(\beta_1) \leq \\ & G(0) = \|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^*. \end{aligned}$$

also

$$g(x_1 - S_K(x_1)) \geq 0.$$

Analog zeigt man

$$g(x_2 - S_K(x_2)) \leq 0$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^* &= \\ \| (S_K(x_1) - S_K(x_2)) + (x_1 - S_K(x_1)) - (x_2 - S_K(x_2)) \|^* &> \\ g(S_K(x_1) - S_K(x_2)) + g(x_1 - S_K(x_1)) - g(x_2 - S_K(x_2)) &> \\ \|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^* & \end{aligned}$$

(2) Sei $\beta_1 = 0 > \beta_2$:

Wegen $\beta_1 = 0$ ist

$$G(0) \leq G(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$S_K(x_1) - S_K(x_2) \perp^* x_1 - S_K(x_1)$$

Man setze

$$v = x_1 - S_K(x_1)$$

und verfähre wie bei (1).

(3) Sei $\beta_2 = 0 > \beta_1$:

Man verfähre analog zu (2).

(4) Sei $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

Wegen

$$S_K(x_2) + \alpha_1 w_1 = S_K(x_1)$$

und

$$S_K(x_1) + \alpha_2 w_2 = S_K(x_2)$$

ist $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ gleichbedeutend mit

$$S_K(x_1) = S_K(x_2)$$

Folglich ist α_1 und α_2 verschieden von Null. Wie in (2) gilt

$$S_K(x_1) - S_K(x_2) \perp^* x_1 - S_K(x_1)$$

wegen $\beta_1 = 0$ und

$$S_K(x_2) - S_K(x_1) \perp^* x_2 - S_K(x_2)$$

wegen $\beta_2 = 0$.

Deshalb gibt es lineare Funktionale g_i ($i=1,2$) mit

$$g_i \left(\frac{S_K(x_1) - S_K(x_2)}{\|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^*} \right) = 1$$

und

$$g_i(x_1 - S_K(x_1)) = 0$$

Wenn

$$g_1(x_2 - S_K(x_2)) > 0$$

und

$$g_2(x_1 - S_K(x_1)) < 0$$

ist, kann die Gleichung

$$S_K(x_1) + \sigma(x_1 - S_K(x_1)) = S_K(x_2) + \tau(x_2 - S_K(x_2))$$

mit

$$\sigma = - \|S_K(x_2) - S_K(x_1)\|^* / g_2(x_1 - S_K(x_1)) > 0$$

und

$$\tau = \|S_K(x_1) - S_K(x_2)\|^* / g_1(x_2 - S_K(x_2)) > 0$$

erfüllt werden. Aus der Strahlenförmigkeit von S_K folgt

$$S_K(x_1) = S_K(x_2)$$

Also ist

$$g_1(x_2 - S_K(x_2)) \leq 0$$

oder

$$g_2(x_1 - S_K(x_1)) > 0$$

Wenn $g_1(x_2 - S_K(x_2)) \leq 0$ ist, setzen wir

$$v = x_2 - S_K(x_2)$$

und

$$g = g_1$$

und argumentieren analog zu (1).

Für $g_2(x_1 - S_K(x_1)) \geq 0$ gehe man analog vor.

//

Der Beweis von Satz 4.9 zeigt, daß in der Ebene jede strahlenförmige, orthogonale Retraktion schon stark kontraktiv ist. Es finden sich leicht Beispiele, daß man hierbei nicht auf die Strahlenförmigkeit verzichten kann.

Die folgende Aussage von Gruber ([18]) beschreibt, wann eine Jordankurve eine Normstrecke ist:

PROPOSITION 4.10: Sei $p, q \in X$, $p \neq q$ und D der Durchschnitt von $B(0,1)$ mit einer Stützgeraden an $B(0,1)$ im Punkt $(p-q)/\|p-q\|$. Sei S eine Jordankurve, die p, q verbindet.

S ist genau dann eine Normstrecke, wenn für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$ gilt:

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} \text{ liegt in } D \text{ bzw. } -D.$$

Sei $u \in \partial B(0,1)$ so gewählt, daß $SK(u)$ der kleinste der Schattenkegel ist, die $p-q$ enthalten. Dann können wir folgern, daß für jedes $x \in S$ die Normstrecke S ganz in $x+SK(u)$ verläuft.

Die Struktur kompakter, normkonvexer Mengen in der Ebene läßt sich wie folgt beschreiben (vgl. [18]):

PROPOSITION 4.11: Sei K kompakt.

K ist genau dann normkonvex, wenn K aus $co(K)$ dadurch entsteht, daß man aus $co(K)$ höchstens abzählbar viele, disjunkte Mengen herausnimmt, die jeweils von einer abgeschlossenen Strecke S im Rand von $co(K)$ und einer die beiden Randpunkte von S im Rand von K verbindenden Normstrecke berandet werden.

Damit können wir die folgende Beschreibung von Cosonnen in der Ebene geben:

SATZ 4.12: Jede abgeschlossene, normkonvexe Menge ist eine Cosonne.

BEWEIS: Sei K eine abgeschlossene, normkonvexe Menge, die

den Ursprung enthält. Weiter sei P ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu Geraden durch den Ursprung sind, die $\partial B(0,1)$ in extremen Punkten treffen. Dann ist

$$\{K \cap nP: n \in \mathbb{N}\}$$

eine aufsteigende Folge kompakter, normkonvexer Mengen, deren Vereinigung K ergibt. Wegen Proposition 2.6 dürfen wir somit annehmen, daß K kompakt ist.

Sei $x \in X \setminus \text{co}(K)$. Betrachten wir zunächst den Fall, daß

$$P_{\text{co}(K)}^*(x) \cap K \neq \emptyset$$

ist. Da $\text{co}(K)$ eine strikte Sonne bzgl. $\|\cdot\|^*$ ist, gilt

$$K \cap C^*(k, x) \subseteq \text{co}(K) \cap C^*(k, x) = \emptyset$$

für alle $k \in P_{\text{co}(K)}^*(x) \cap K$. Also ist nach Bemerkung 4.2

$$K \cap k + SK^+(x-k) = \emptyset$$

d.h.

$$k \in A_K(x) \cap K$$

Wenn

$$P_{\text{co}(K)}^*(x) \cap K = \emptyset$$

ist, liegt $P_{\text{co}(K)}^*(x)$ im relativen Inneren einer Strecke zwischen zwei Randpunkten a und b von K , welche mit K nur diese Randpunkte gemein hat. Für ein beliebiges y aus $P_{\text{co}(K)}^*(x)$ ist

$$x-y \perp^* a-b$$

Also liegt $a-b$ in $SK(x-y)$. Nun werden a und b durch eine Normstrecke S im Rand von K verbunden. Sei k der Schnittpunkt von $[x, y]$ mit S . Dann verläuft S in $k + SK(x-y)$. Folglich wird K durch $k + SK^+(x-k)$ gestützt, d.h.

$$k \in A_K(x) \cap K$$

Sei $x \in \text{co}(K) \setminus K$. Dann ist x in einer Menge enthalten, die von einer Strecke mit Randpunkten $a, b \in K$, die außerhalb von K verläuft, und einer a und b im Rand von K verbindenden Normstrecke S berandet wird. Sei $u \in \partial B(0,1)$, so daß $a-b$ in $SK(u)$ liegt. Sei k der Schnittpunkt von S mit $x + \mathbb{R} \cdot u$. Dann verläuft S in $k + SK(x-k)$. Folglich

wird K von $k + SK^+(x-k)$ gestützt, d.h.

$$k \in A_K(x) \cap K \quad .$$

//

Wir haben damit gezeigt, daß die Existenzmengen bester Coapproximation in der Ebene genau die abgeschlossenen, normkonvexen Mengen sind. Insbesondere lassen diese stets eine strahlenförmige und kontraktive Retraktion zu, die man über P_K^* erhalten kann. Die Existenz solcher Retraktionen hat Gruber in [18] auf anderem Wege gezeigt.

5. Leibnizgeraden und Krümmungsverhältnisse

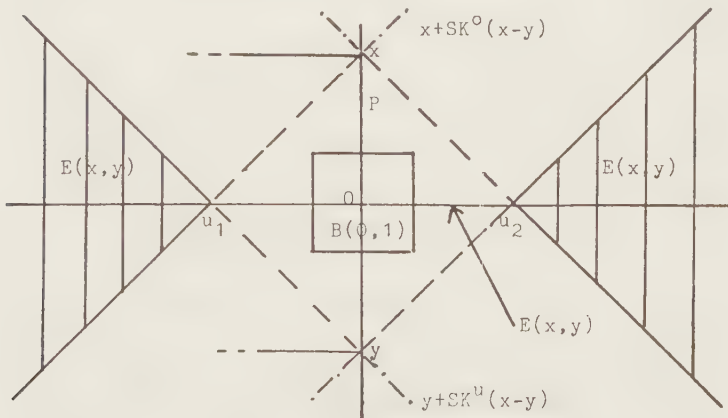
In diesem Abschnitt bezeichne X eine Ebene. Wir sprechen deshalb im Zusammenhang mit $E(x,y)$ von einer Leibnizschen Geraden. Es soll zunächst der Verlauf einer Leibnizgeraden in dem über den zugehörigen Schattenkegel festgelegten Bereich (vgl. Proposition 3.7) untersucht werden. Wir dürfen dabei $x \neq y$ voraussetzen. Wenn $x-y$ parallel zu einer Seite von $B(0,1)$ ist, hat $E(x,y)$ nichtleeres Inneres. Seien u_1 und u_2 die Mittelpunkte der Kreise mit den kleinsten Radien, die die Strecke zwischen x und y im Rand enthalten. Innerhalb des durch u_1, x, u_2 und y gegebenen Parallelogramms P ist $E(x,y)$ eine stetige Kurve, die den Rand von P nur in u_1 und u_2 schneidet. Außerhalb von P wird $E(x,y)$ durch den Vollwinkel mit dem Scheitel u_1 und den Schenkeln

$$\{u_1 + \lambda(u_1 - x) : \lambda \geq 0\}$$

und

$$\{u_1 + \lambda(u_1 - y) : \lambda \geq 0\}$$

bzw. dem dazu bzgl. $(x+y)/2$ punktsymmetrischen Vollwinkel gegeben (vgl. Figur 7):



FIGUR 7

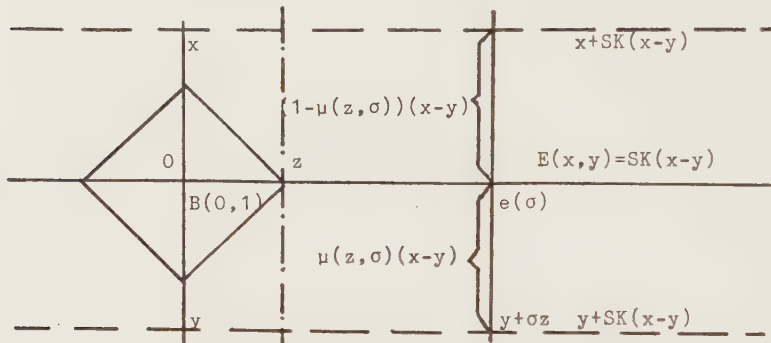
Sei nun $x-y$ nicht parallel zu einer Seite von $B(0,1)$. Dann enthält $SG(x-y)$ genau zwei zum Ursprung punktsymmetrische Punkte. Sei $z \in SG(x-y)$. Für $\sigma > 0$ setzen wir

$$e_{x-y}(z, \sigma) \equiv y + \sigma z + \mu_{x-y}(z, \sigma) \cdot (x-y)$$

gleich dem Schnittpunkt von $\{y + \sigma z + \mu(x-y) : \mu \in \mathbb{R}\}$ mit $E(x, y)$. Dieser Schnittpunkt ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$0 < \mu_{x-y}(z, \sigma) < 1$$

Man vergleiche Figur 8 :



FIGUR 8

Wir wollen

$$\lambda_{x-y}(z, \sigma) \equiv (1 - \mu_{x-y}(z, \sigma)) / \mu_{x-y}(z, \sigma)$$

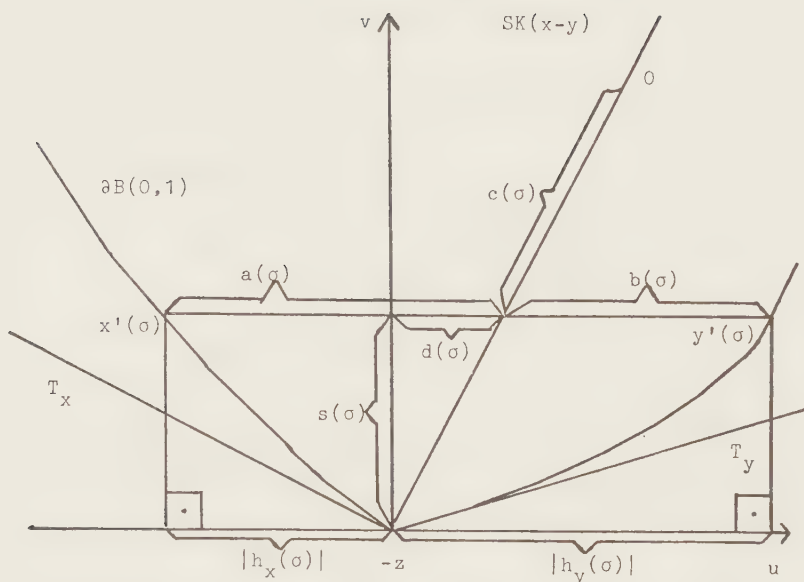
für großes σ berechnen, um so Aufschluß über das asymptotische Verhalten von $E(x, y)$ zwischen $x+SK(x-y)$ und $y+SK(x-y)$ in Richtung von z zu erhalten. Wir betrachten Figur 9. Dabei ist

$$x'(\sigma) = (x - e_{x-y}(z, \sigma)) / \|x - e_{x-y}(z, \sigma)\|$$

und

$$y'(\sigma) = (y - e_{x-y}(z, \sigma)) / \|y - e_{x-y}(z, \sigma)\|$$

Die Steigung der Halbtangenten T_x bzw. T_y in $-z$ bezogen auf das durch u und v gegebene kartesische Koordinatensystem wird durch $m_x(-z)$ bzw. $m_y(-z)$ bezeichnet. Weiter sei $m(-z)$ die Steigung von $SK(x-y)$ in diesem System. Dabei setzen wir $m(-z) = +\infty$, wenn der Ursprung auf



FIGUR 9

der v -Achse liegt. $r_x(s(\sigma))$ bzw. $r_y(s(\sigma))$ sei der Radius des euklidischen Kreises, der durch $-z$ und $x'(\sigma)$ bzw. $-z$ und $y'(\sigma)$ geht und in $-z$ die Steigung $m_x(-z)$ bzw. $m_y(-z)$ besitzt.

Wir definieren das obere Krümmungsverhältnis (von $B(0,1)$) zu $x-y$ in $-z$ durch

$$v_{x-y}^o(-z) = \lim_{s \downarrow 0} (r_x(s)/r_y(s))$$

und das untere Krümmungsverhältnis (von $B(0,1)$) zu $x-y$ in $-z$ durch

$$v_{x-y}^u(-z) = \lim_{s \uparrow 0} (r_x(s)/r_y(s))$$

Damit erhalten wir die folgende Beschreibung des asymptotischen Verhaltens der Leibnizgerade $E(x,y)$ in Richtung von z :

SATZ 5.1: (a) Für $m_x(-z) \neq 0$ oder $m_y(-z) \neq 0$ ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(z, \sigma) = \frac{m(-z) + |m_x(-z)|}{m(-z) - |m_y(-z)|} \cdot \frac{|m_y(-z)|}{|m_x(-z)|}$$

Dabei ist $+\infty/+\infty = 1$ und $|m_y|/0 = +\infty$ gesetzt.

(b) Für $m_x(-z) = m_y(-z) = 0$ ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(z, \sigma) = \sqrt{v_{x-y}^u(-z)}$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(z, \sigma) = \sqrt{v_{x-y}^o(-z)}$$

BEWEIS: Der Übersichtlichkeit wegen verzichten wir auf die Indizierung mit z . Sei $\sigma > 0$. Mit den Bezeichnungen von Figur 9 gilt

$$\lambda_{x-y}(\sigma) = a(\sigma)/b(\sigma)$$

Aus

$$c(\sigma)/\sigma = \|x'(\sigma) - y'(\sigma)\| / \|x-y\|$$

folgt

$$c(\sigma) = \|-z + ((1 - \mu_{x-y}(\sigma))/\sigma) \cdot (x-y)\|^{-1}$$

also

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} c(\sigma) = 1/\|-z\| = 1$$

Folglich ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} s(\sigma) = 0$$

Für $r_x(\sigma)$ erhalten wir

$$r_x(\sigma) = \sqrt{1+m_x^2} \cdot \frac{\left[1 + \left[\frac{s(\sigma)}{h_x(\sigma)}\right]^2\right] \cdot \frac{h_x(\sigma)}{2}}{\frac{s(\sigma)}{h_x(\sigma)} - m_x}$$

Eine Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach $h_x(\sigma)$ ergibt

$$h_x(\sigma) = -m_x \kappa_x r_x(\sigma) - \sqrt{m_x^2 \kappa_x^2 r_x(\sigma)^2 - s(\sigma)^2 + 2r_x(\sigma)s(\sigma)\kappa_x}$$

Dabei ist

$$\kappa_x = \sqrt{1+m_x^2}$$

Außerdem haben wir

$$|h_x(\sigma)| + d(\sigma) = a(\sigma)$$

und

$$d(\sigma) = s(\sigma)/m$$

Sei nun $m_x \neq 0$. Wegen

$$\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} = \kappa_x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{s(\sigma)}{h_x(\sigma)}\right)^2} \cdot \frac{s(\sigma)}{h_x(\sigma)} \cdot \left(\frac{s(\sigma)}{h_x(\sigma)} - m_x\right)$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} h_x(\sigma)/s(\sigma) = 1/m_x$$

gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} s(\sigma)/r_x(\sigma) = 0$$

Eine Taylorentwicklung der Wurzel im Ausdruck für $|h_x(\sigma)|$ liefert

$$a(\sigma) = |m_x| \kappa_x r_x(\sigma) \cdot \left\{ -1 + \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m_x^2 \kappa_x^2} \cdot \left(\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} \right)^2 + 2 \cdot \frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} \cdot \frac{1}{m_x^2 \kappa_x^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. o \left(\left(\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} \right)^2 \right) \right] \right\} + \frac{s(\sigma)}{m} =$$

$$|m_x| \kappa_x s(\sigma) \cdot \left\{ \frac{1}{m_x^2 \kappa_x^2} + o \left(\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} \right) \right\} + \frac{s(\sigma)}{m}$$

Wenn $m_y \neq 0$ ist, folgt

$$\frac{a(\sigma)}{b(\sigma)} = \frac{|m_x| \kappa_x \left(\frac{1}{m_x^2 \kappa_x^2} + o \left(\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} \right) \right) + \frac{1}{m}}{|m_y| \kappa_y \left(\frac{1}{m_y^2 \kappa_y^2} + o \left(\frac{s(\sigma)}{r_y(\sigma)} \right) \right) - \frac{1}{m}}$$

Deshalb ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(\sigma) = \frac{\frac{1}{|m_x|} + \frac{1}{m}}{\frac{1}{|m_y|} - \frac{1}{m}} = \frac{m + |m_x|}{m - |m_y|} \cdot \frac{|m_y|}{|m_x|}$$

Datei sei

$$(m + |m_x|)/(m - |m_y|) = 1$$

für $m = +\infty$. Man beachte, daß $m = |m_y|$ nicht auftreten kann.

Sei nun $m_y = 0$. Dann haben wir

$$h_y(\sigma) = \sqrt{-s(\sigma)^2 + 2r_y(\sigma)s(\sigma)}$$

Außerdem gilt wegen

$$\frac{r_y(\sigma)}{s(\sigma)} = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{h_y(\sigma)}{s(\sigma)} \right\}^2$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} h_y(\sigma)/s(\sigma) = +\infty$$

auch

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} r_y(\sigma)/s(\sigma) = +\infty$$

Deshalb folgt aus

$$\frac{a(\sigma)}{b(\sigma)} = \frac{|m_x| \kappa_x \left(\frac{1}{m_x^2 \kappa_x} + o\left(\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)}\right) \right) + \frac{1}{m}}{\sqrt{-1 + 2 \cdot \frac{r_y(\sigma)}{s(\sigma)}} - \frac{1}{m}}$$

daß

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(\sigma) = 0$$

gilt. Analog zeigt man, daß für $m_x = 0$ und $m_y \neq 0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(\sigma) = +\infty$$

folgt. Damit ist (a) gezeigt.

Sei nun $m_x = m_y = 0$. Wir haben

$$\frac{a(\sigma)}{b(\sigma)} = \frac{\sqrt{-s(\sigma)^2 + 2r_x(\sigma)s(\sigma)} + \frac{s(\sigma)}{m}}{\sqrt{-s(\sigma)^2 + 2r_y(\sigma)s(\sigma)} - \frac{s(\sigma)}{m}} = \sqrt{\frac{r_x(\sigma)}{r_y(\sigma)}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)} + 2 + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{s(\sigma)}{r_x(\sigma)}}}{\sqrt{\frac{s(\sigma)}{r_y(\sigma)} + 2 - \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{s(\sigma)}{r_y(\sigma)}}}$$

und damit die Behauptung (b) wegen

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} s(\sigma)/r_x(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} s(\sigma)/r_y(\sigma) = 0. \quad //$$

BEMERKUNG 5.2:

(a) Falls eine Stützgerade an den Einheitskreis parallel zu $x-y$ keine Halbtangente in ihrem Berührungspunkt z ist, schmiegt sich $E(x,y)$ asymptotisch an den Strahl

$$y + \frac{1}{1+\lambda} \cdot (x-y) + \mathbb{R}_+ z$$

mit

$$\lambda \equiv \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_{x-y}(\sigma)$$

an.

(b) Falls diese Stützgerade eine Halbtangente, aber keine Tangente ist, liefern $x+SK(x-y)$ und $y+SK(x-y)$ die Asymptoten für $E(x,y)$ bzgl. $(x+y)/2$.

(c) Ist die Stützgerade Tangente im Berührungspunkt, wird das asymptotische Verhalten von $E(x,y)$ durch die Krümmungsverhältnisse des Einheitskreises im Berührungspunkt bestimmt. Wenn die Krümmung existiert und von Null verschieden ist, liefert die Gerade

$$\frac{x+y}{2} + SK(x-y)$$

die Asymptote für $E(x,y)$. Im Fall nichtverschwindender Krümmung haben wir also ein "euklidisches" Verhalten der Leibnizgeraden im Unendlichen.

Selbst wenn die Krümmung nicht existiert, dafür aber die links- und rechtseitigen oberen und unteren Krümmungen weder 0 noch $+\infty$ sind, ist die minimale Entfernung von $E(x,y)$ zu $x+SK(x-y)$ und $y+SK(x-y)$ stets positiv. Eine Asymptote wird aber im allgemeinen nicht mehr existieren. Man sollte bedenken, daß für einen "typischen" Einheitskreis in den "meisten" Punkten der einseitige untere bzw. obere Krümmungsradius gleich 0 bzw. $+\infty$ ist (vgl. [27]). In diesen Fällen kann man also die Krümmungsverhältnisse nicht mehr sinnvoll über die Krümmungsradien abschätzen. (d) Wenn allerdings $SK(x-y)$ eine Symmetrieachse von $B(0,1)$ ist, gilt

$$E(x,y) = \frac{x+y}{2} + SK(x-y) .$$

6. Cotschebycheffmengen

Wir nennen eine Teilmenge K von X eine Cotschebycheffmenge, wenn $R_K(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist. R_K ist in diesem Fall stetig. Die leere Menge, ein einzelner Punkt von X sowie X selbst sind triviale Cotschebycheffmengen. Ein Beispiel für eine nichttriviale Cotschebycheffmenge in l_∞^2 ist

$$\{(\lambda, \mu) : \mu \leq |\lambda|, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

BEMERKUNG 6.1: Nichttriviale Cotschebycheffmengen sind unbeschränkt.

BEWEIS: Sei K eine nichttriviale, aber beschränkte Cotschebycheffmenge. Wähle $x \in X \setminus K$, so daß

$$2 \cdot \text{diam}(K) \leq d_K(x)$$

gilt. Sei $k' \in K$. Für $k_0 \in K$ mit

$$\text{diam}(K) = \sup \{ \|k_0 - k\| : k \in K \}$$

haben wir

$$\begin{aligned} \|k' - k\| &\leq \|k' - k_0\| + \|k_0 - k\| \leq 2 \cdot \text{diam}(K) \leq \\ d_K(x) &\leq \|x - k\| \end{aligned}$$

für alle $k \in K$, d.h. $K \subseteq R_K(x)$.

//

Cotschebycheffmengen sind wegen Satz 2.9 stets Cosonnen. Wir wollen hierfür aber ein hübsches, elementares Argument von Westphal ([27]) wiedergeben:

PROPOSITION 6.2: Jede Cotschebycheffmenge ist eine Cosonne.

BEWEIS: Sei K eine Cotschebycheffmenge und $x \in X \setminus K$. Für $0 \leq \lambda \leq 1$ setzen wir

$$x_\lambda = R_K(x) + \lambda(x - R_K(x))$$

Da $B_K(x)$ konvex ist und sowohl $R_K(x)$ als auch x enthält, ist $x_\lambda \in B_K(x)$. Dann ist aber

$$B_K(x_\lambda) \subseteq B_K(x)$$

und damit

$$R_K(x_\lambda) = R_K(x) \quad . \quad //$$

BEMERKUNG 6.3: Für eine Cotschebycheffmenge K in X gilt

$$A_K \cap K = R_K \quad .$$

An einfachen Beispielen im euklidischen Raum sieht man, daß der Schnitt zweier Existenzmengen bester Coapproximation eine Cotschebycheffmenge ergeben kann, auch ohne daß diese Mengen Cotschebycheffmengen sind. Außerdem werden wir sehen, daß der Schnitt zweier Cotschebycheffmengen selbst bei einer striktkonvexen Norm i.a. keine Cotschebycheffmenge liefert. Immerhin gilt:

BEMERKUNG 6.4: Der Schnitt einer Familie von Cotschebycheffmengen, deren Komplemente disjunkt sind, ist wieder eine Cotschebycheffmenge.

Ein $x \in \partial B(0,1)$ heiße beweglich, wenn ein $\lambda > 0$ mit

$$[-\lambda x, x] \subseteq R_{SG(x)}(x)$$

existiert. Man vergleiche diesbezüglich die Bedingung (*) von Westphal ([27]) und die Eigenschaft (S) von Bruck und Reich ([10]) .

Mit unseren Ergebnissen zum asymptotischen Verhalten von Leibnizgeraden in der Ebene haben wir insbesondere die Beweglichkeit eines Punktes des Einheitskreises in der Ebene vollständig beschrieben. Für höherdimensionale Räume erhalten wir die folgende hinreichende Bedingung:

LEMMA 6.5: Sei $x \in \partial B(1,1)$ und $SG(x)$ enthalte keine zu x parallele Strecke. Weiter sei die Norm für jedes $u \in SG(x)$ streng konvex und $SG(x)$ relativ kompakt in X .

$$x^T H(u) x > 0$$

für alle u aus SG(x), wobei H(u) die zur Norm gehörige Hessematrix an der Stelle u ist. Dann ist x beweglich.

BEWEIS: Sei (u_n) eine Folge von Elementen aus $SK(x)$ mit $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. Die Gerade $u_n + \mathbb{R}x$ hat mit $E(-x, x)$ genau einen Schnittpunkt $u_n + \lambda_n x$. Offenbar ist $-1 < \lambda_n < +1$. Wir haben

$$\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} + \frac{\lambda_n - 1}{\|u_n\|} x \right\| = \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} + \frac{\lambda_n + 1}{\|u_n\|} x \right\|.$$

Für hinreichend große n kann man diese Gleichung um den Punkt $u_n / \|u_n\|$ bis zur zweiten Ordnung entwickeln. Wenn man berücksichtigt, daß das Glied erster Ordnung wegen $u_n \in SK(x)$ verschwindet, erhält man

$$\frac{(\lambda_n - 1)^2}{\|u_n\|^2} x^T H\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) x + \frac{C_n}{\|u_n\|^3} = \frac{(\lambda_n + 1)^2}{\|u_n\|^2} x^T H\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) x + \frac{C'_n}{\|u_n\|^3}$$

Dabei ist die Folge der Konstanten C_n und C'_n beschränkt. Multipliziert man die Gleichung mit $\|u_n\|^2$ und geht anschließend zur Grenze über, erkennt man, daß der Grenzwert der λ_n existiert und gleich 0 ist. //

Man sieht an diesem Satz, daß ein "gutartiges" Krümmungsverhalten der Einheitskugel euklidisches Verhalten aller Leibnizschen Ebenen im Unendlichen und damit Beweglichkeit aller Punkte der Einheitskugel zur Folge hat. Dies gilt insbesondere für die l_p -Normen mit $1 < p < +\infty$. So haben Westphal ([27]) wie auch Bruck und Reich ([10]) gezeigt, daß in l_p^n , $1 < p < +\infty$ alle Punkte der Einheitskugel beweglich sind.

Wenn x parallel zu einer Seite von $\partial B(0,1)$ ist, gilt:

$$E(0, x) \cap SK(x) \neq \emptyset.$$

Damit kann x nicht beweglich sein. Wir erhalten daher:

BEMERKUNG 6.6: Wenn alle Punkte von $\partial B(0,1)$ beweglich sind, ist X striktkonvex.

Die Umkehrung ist i.a. falsch. Man findet schon in der Ebene einfache Gegenbeispiele.

Über ein elementares Argument können wir nun ein Ergebnis von Westphal ([27]) verschärfen:

SATZ 6.7: Wenn alle Punkte aus $\partial B(0,1)$ beweglich sind, ist jede Cotschebycheffmenge ein affiner Teilraum von X .

BEWEIS: Sei K eine nichttriviale Cotschebycheffmenge in X , die den Ursprung enthält. Wegen Bemerkung 6.6 ist K konvex. Sei $x \in \text{lin}(K) \setminus K$. Wir dürfen $x \in \partial B(0,1)$ und $R_K(x) = 0$ annehmen. Es gibt ein $\lambda > 0$ mit $-\lambda x \in B_K(x)$. Also ist

$$B_K(-\lambda x) \subseteq B_K(x)$$

und damit $R_K(-\lambda x) = R_K(x)$. Da K eine Cosonne ist, liegt K in $SK(x)$. Weil $SK(x)$ ein Geradenbüschel ist und x in $\text{lin}(K)$ liegt, müßte $x \in SK(x)$ gelten. //

Insbesondere haben wir:

KOROLLAR 6.8: In l_p^n , $1 < p < +\infty$, ist jede Cotschebycheffmenge ein affiner Teilraum.

Wegen Bemerkung 7.9 lassen lineare Cotschebycheffmengen eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion zu. Umgekehrt sind natürlich lineare Teilräume, die eine lineare Kontraktion zulassen, in glatten Räumen Cotschebycheffmengen. Damit ergibt sich das folgende Resultat von Westphal ([27]), das dort sogar über σ -finiten Maßräumen abgeleitet wurde:

SATZ 6.9: K ist genau dann eine Cotschebycheffmenge in l_p^n , $1 < p < +\infty$, wenn K ein affiner Teilraum ist, so daß auf den zugehörigen Unterraum eine lineare Kontraktion von l_p^n existiert.

Die Resultate von Ando ([1]) ergeben nun die folgende geometrische Beschreibung von Cotschebycheffmengen in endlichdimensionalen l_p -Räumen:

SATZ 6.10: Sei $1 < p < +\infty$, $n > 3$. Die Cotschebycheffmengen in l_p^n sind genau die affinen Teilräume von l_p^n , deren zugehöriger Unterraum zu einem l_p -Raum linear isometrisch ist.

Wenn nicht alle Punkte aus $\partial B(0,1)$ beweglich sind, treten durchaus auch Cotschebycheffmengen auf, die keine affinen Teilräume sind. Als wohl naheliegender Fall ergibt sich:

BEMERKUNG 6.11: Wenn $B(0,1)$ glatt, $x \in \partial B(0,1)$ nicht beweglich und $SG(x)$ eben ist, ist mit $SK(x)$ auch ein zu $SK(x)$ gehöriger Halbraum eine Cotschebycheffmenge.

I.a. werden aber die geometrischen Verhältnisse, die die Gestalt von $B_K(x)$ festlegen, wesentlich unübersichtlicher sein. Wir wollen uns deshalb für den Rest dieses Abschnitts darauf einschränken, daß X zweidimensional ist.

Unter einem Parallelstreifen in X verstehen wir X selbst, eine abgeschlossene Halbebene oder die abgeschlossene Punktmenge zwischen zwei parallelen Geraden. Ein Parallelstreifen heißt nichttrivial, wenn er von X verschieden und keine Gerade ist. Die Richtung eines von X verschiedenen Parallelstreifens ist die Gerade durch den Ursprung, die zu einer Geraden im Rand des Parallelstreifens parallel ist.

Eine Unendlichkeitsrichtung einer unbeschränkten konvexen Menge K ist ein Strahl, der vom Ursprung ausgeht und in einem Punkt von K angetragen weiter in K verläuft. Die Menge der Unendlichkeitsrichtungen einer abgeschlossenen,

konvexen Menge K ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel $U(K)$ mit Spitze in 0 .

Wir durchlaufen Kegelränder spitzer Kegel entgegen dem Uhrzeigersinn und können entsprechend von einem rechten bzw. linken Schenkel sprechen.

SATZ 6.12: Eine Cotschebycheffmenge, die mehr als einen Punkt enthält, ist in einer striktkonvex normierten Ebene ein Parallelstreifen.

BEWEIS: Sei K eine nichttriviale Cotschebycheffmenge in der striktkonvexen Ebene X . Dann ist K abgeschlossen, unbeschränkt und konvex.

Sei K eindimensional. Dann ist K eine Gerade oder ein Strahl. Nehmen wir an, daß letzteres zutrifft und k der Anfangspunkt von K auf $\text{lin}(K)$ ist. Für $x \in \text{lin}(K) \setminus K$ ist

$$R_K(x) = \{k + \lambda(k-x) : 0 \leq \lambda \leq \|x-k\|\}$$

im Widerspruch zur Eindeutigkeit.

Sei K zweidimensional. O.B.d.A. sei der Ursprung ein Glättepunkt aus ∂K . Sei T die Stützgerade an K in 0 . Es gibt ein x aus der offenen Halbebene zu T , welche K nicht enthält mit $T = SK(x)$. Insbesondere ist $R_K(x) = 0$. Offenbar liegt $U(K)$ in der abgeschlossenen Halbebene zu T , welche K enthält. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, daß $U(K)$ gleich dieser Halbebene ist. Nehmen wir also an, daß der Rand von $U(K)$ von T verschieden ist.

(1) Ein vom Ursprung ausgehender Strahl T_1 von T stimme mit dem linken Schenkel von $\partial U(K)$ überein. Man wähle eine Folge von von 0 verschiedenen Punkten (k_n) auf T_1 , die gegen Null konvergieren. Für k_n hinreichend nahe bei 0 ist der Schnitt der abgeschlossenen Halbebene zu $k_n + SK(x - k_n)$, welche x enthält, mit K gleichmäßig beschränkt. Würde

$$E_x(k_n, x) \cap K = \emptyset$$

für ein n gelten, wäre k_n ein weiteres von 0 verschiedenes Element bester Coapproximation zu x . Sei k'_n aus

aus $E(k_n, x) \cap K$. Wir dürfen annehmen, daß die k'_n gegen ein $k' \in K$ konvergieren. Wegen

$$\|x - k'\| = \|0 - k'\|$$

liegt k' in $E(x, 0)$. Dies ist unmöglich, denn $E(x, 0)$ schneidet nicht einmal T .

(2) Beide Randstrahlen von $U(K)$ zeigen in die offene Halbebene zu T , die K enthält. Sei

$$k_n = 0 + (1/n) \cdot (0 - x)$$

Da der Ursprung ein Glättepunkt von K ist, liegt k_n für hinreichend große n in K . Wäre

$$E_x(k_n, x) \cap K = \emptyset$$

für eines dieser n , hätten wir ein weiteres von 0 verschiedenes Element bester Coapproximation von x . Sei k'_n aus $E(k_n, x) \cap K$. Da $E(k_n, x) \cap K$ zwischen $k_n + SK(x)$ und $x + SK(x)$ liegt und K in diesem Parallelstreifen beschränkt ist, dürfen wir annehmen, daß (k'_n) gegen ein $k' \in K$ konvergiert. Dies ist aus den gleichen Gründen wie in (1) nicht möglich. //

Wenn man beachtet, daß eine zu einer Geraden transversale Richtung genau dann eindeutig bestimmt ist, wenn die Gerade den Rand des Einheitskreises in einem Glättepunkt trifft, ergibt sich:

BEMERKUNG 6.13: Eine Gerade in X ist genau dann eine Co-tschebycheffmenge, wenn ihre Richtung den Rand des Einheitskreises in einem Glättepunkt trifft.

Für den Fall eines nichttrivialen Parallelstreifens erhalten wir:

SATZ 6.14: Ein nichttrivialer Parallelstreifen in X ist genau dann eine Co-tschebycheffmenge, wenn seine Richtung $\partial B(0, 1)$ in einem extremen Glättepunkt trifft, in dem das obere Krümmungsverhältnis $+\infty$ oder das untere 0 ist.

BEWEIS: Sei K ein nichttrivialer Parallelstreifen in X .
 $" \Rightarrow "$: Wenn die Richtung von K den Rand von $B(0,1)$ in einem Nichtglättepunkt trifft, sind schon die Begrenzungsgeraden von K keine Cotschebycheffmengen. Deshalb muß die Richtung von K den Rand von $B(0,1)$ in einem Glättepunkt z treffen. Sei $x \in X \setminus K$. Weiter sei G die eindeutig bestimmte Gerade durch x , die transversal zur Richtung von K ist. Sei k der Schnittpunkt von G mit der Randgeraden H von K , die x am nächsten liegt. Wenn z im Inneren einer Seite von $B(0,1)$ liegt, ist

$$E_x(k+\lambda(k-x), x) \cap K = \emptyset$$

für hinreichend kleine $\lambda > 0$. Da aber $k+\lambda(k-x)$ für hinreichend kleine λ in K liegt, widerspricht dies der Eindeutigkeit. Deshalb muß z ein extremer Glättepunkt sein. Wenn die Krümmungsverhältnisse in z von 0 und $+\infty$ verschieden sind, hat $E(x, k)$ von H positiven minimalen Abstand, d.h. für hinreichend kleines $\lambda > 0$ ist

$$k+\lambda(k-x) \in R_K(x) ,$$

im Widerspruch zur Eindeutigkeit.

$" \Leftarrow "$: Sei $x \in X \setminus K$ und G die eindeutig bestimmte Gerade durch x , die transversal zur Richtung von K ist. Sei k' aus $R_K(x)$. Wenn $x-k'$ nicht parallel zu G ist, wird K von $x+SK(x-k')$ geschnitten, d.h. $E_x(x, k') \cap K$ ist nicht leer. Also haben alle Elemente aus $R_K(x)$ die Form $k+\lambda(k-x)$, wobei k der Schnittpunkt von G mit der Begrenzungsgeraden von K ist, die x am nächsten liegt. Weil diese Begrenzungsgerade eine Asymptote für $E(x, k)$ ist, muß $\lambda = 0$ sein. //

BEMERKUNG 6.15: Cotschebycheffmengen in einer striktkonvex normierten Ebene sind, sofern sie nicht einpunktig sind, Parallelstreifen, deren Richtung $\partial B(0,1)$ in einem Glättepunkt trifft. Dabei treten genau dann nichttriviale Parallelstreifen als Cotschebycheffmengen auf, wenn dieser Glättepunkt extrem und in ihm die Krümmungsverhältnisse nicht eigentlich ist.

Wenn man in einer striktkonvexen Ebene zwei nichtparallele und nichttriviale Parallelstreifen schneidet, die Cotschebycheffmengen sind, sieht man, daß der Schnitt schon deswegen keine Cotschebycheffmenge sein kann, weil er beschränkt ist.

Die Gestalt von Cotschebycheffmengen bei einer nicht striktkonvexen Norm ist i.a. um vieles komplizierter. Wir nennen eine Cotschebycheffmenge elementar, wenn sie von der Form

$$C(x + SK^+(z))$$

für $z \in \partial B(0,1)$ und $x \in X$ ist. Elementare Cotschebycheffmengen lassen sich mit unseren Ergebnissen wie folgt beschreiben:

BEMERKUNG 6.16: $C SK^+(z)$ ist genau dann eine Cotschebycheffmenge, wenn $SG(z)$ eine Seite oder aber ein Glättungspunkt von $B(0,1)$ ist, in dem ein Krümmungsverhältnis nicht eigentlich ist.

Über Bemerkung 6.4 kann man aus elementaren Cotschebycheffmengen eine Vielzahl komplizierter Cotschebycheffmengen aufbauen.

Eine Normgerade ist eine stetige und injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ in X , so daß die Länge eines Kurvenstücks zwischen zwei Kurvenpunkten durch deren Entfernung gegeben wird. Sinngemäß ist der Begriff eines Normstrahls zu verstehen.

PROPOSITION 6.17: Eindimensionale Cotschebycheffmengen sind Normgeraden.

BEWEIS: Sei K eine eindimensionale Cotschebycheffmenge in X . Wegen ihrer Unbeschränktheit kann K nur eine Normgerade oder ein Normstrahl sein. Nehmen wir an, K sei ein Normstrahl mit Anfangspunkt k . Dann gibt es ein z

aus $\partial B(0,1)$, so daß K in einem der beiden Winkel von $k+SK(z)$ liegt. Sei k' ein von k verschiedener Punkt aus K . Die Trägergerade von k und k' bezeichnen wir mit G . Wir wählen x auf G , aber nicht auf dem Teil, der mit K im selben Winkel von $k+SK(z)$ verläuft. Dann liegt der Winkel von $k+SK(z)$, welcher K enthält, in $k+SK^-(x-k)$. Wenn man nun x hinreichend weit von k' entfernt wählt, ist

$$E_x(k',x) \cap K = \emptyset, \quad ,$$

denn $k'+SK^u(x-k')$ hat mit $k+SK(z)$ und damit mit K höchstens ein endliches Stück gemein. Dies widerspricht der Eindeutigkeit. //

So kommen wir zu einem weiteren Typus einer Cotschebycheffmenge in der Ebene:

PROPOSITION 6.18: Normgeraden, die keine Geraden sind, sind stets Cotschebycheffmengen.

BEWEIS: Sei K eine Normgerade, die keine Gerade ist. Dann ist für $z \in \partial B(0,1)$ der Schattenkegel $SK(z)$ mit

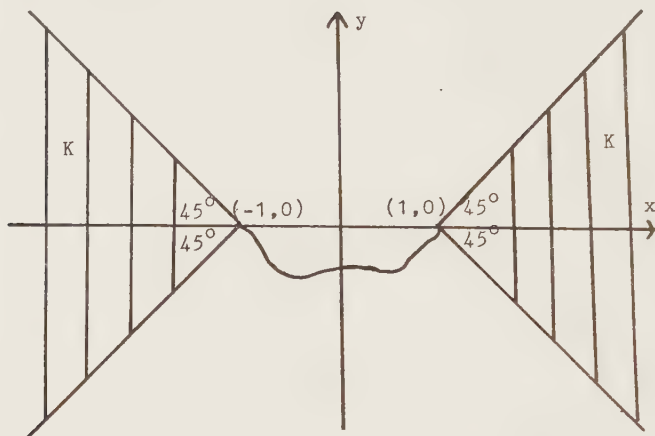
$$\bar{k} + SK(z) \supseteq K \quad \forall \bar{k} \in K$$

ein echter Winkel und $SG(z)$ eine eindeutig bestimmte Seite von $B(0,1)$. Für $x \in X \setminus K$ sei G die Gerade parallel zu z durch x . Offenbar wird K von G in genau einem Punkt k geschnitten. k ist dann Element bester Coapproximation von x in K . Für ein weiteres $k' \in R_K(x)$ ist $x-k'$ nicht parallel zu z . Dann sind aber der rechte oder der linke Winkel von $k'+SK(z)$ und damit Elemente aus K in $k'+SK^+(x-k')$ enthalten. Also ist k das einzige Element bester Coapproximation von x in K . //

Einen weiteren Typ einer Cotschebycheffmenge gibt:

BEIPIEL 6.19: Die in Figur 1C skizzierte Menge ist eine Cotschebycheffmenge in l_∞^2 . Dabei kann die Verbindungs-

kurve zwischen $(-1,0)$ und $(1,0)$ als beliebige Norm-
strecke gewählt werden:



FIGUR 10

7. Lineare Existenzmengen bester Coapproximation

Im folgenden sei U ein Unterraum von X . Wir nennen eine Existenzmenge bester Coapproximation linear, wenn sie eine lineare Mannigfaltigkeit ist.

BEMERKUNG 7.1:

$$R_U(x) = \{u \in U: U \perp x-u\}$$

Daraus ergibt sich:

KOROLLAR 7.2: Eine lineare Existenzmenge bester Coapproximation ist eine strikte Cosonne.

Für eine Teilmenge M von X definieren wir

$$M^\perp = \{z \in X: z \perp M\}$$

und

$$M^\top = \{z \in X: M \perp z\}$$

Wenn V ein Geradenbüschel durch den Ursprung ist, gilt

$$V^\perp = \{z \in X: \langle V, z \rangle_s \geq 0\}$$

und

$$V^\top = \{z \in X: \langle z, V \rangle_s \geq 0\}$$

In Abschnitt 3 hatten wir gesehen, daß

$$U^\perp = SK(U)$$

gilt. Auch $U^\top$ besitzt eine geometrische Interpretation, die sich unmittelbar aus der Definition ergibt:

BEMERKUNG 7.3:

$$U^\top = \{z \in X: SG(z) \supseteq U \cap \partial B(0,1)\}$$

Während $U^\perp$ für echte Unterräume von X stets von $\{0\}$ verschieden ist, wird $U^\top$ dies i.a. nicht erfüllen. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an den Satz von Kakutani:

SATZ 7.4: Sei $\dim(X) > 2$. Dann ist X genau dann euklidisch, wenn für jeden Hyperteilraum H von X die Menge $H \cap \partial B(0,1)$ in einer $(\dim(X)-1)$ -dimensionalen Schatten-grenze liegt.

Wenn X also keine euklidische Norm trägt, und die Dimension von X größer als 2 ist, existieren stets Hyperteilräume H von X mit $H^\top = \{0\}$.

Wegen der Definitheit des semiinneren Produkts, haben wir

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

bzw.

$$U \cap U^\top = \{0\}$$

Daraus und aus Bemerkung 7.1 folgt:

BEMERKUNG 7.4: U ist genau dann eine Existenzmenge besser Coapproximation, wenn

$$U \oplus U^\top = X$$

gilt.

Man beachte, daß aus einer solchen direkten Zerlegung von X i.a. nicht deren Eindeutigkeit folgt, weil $U^\top$ in der Regel kein Unterraum, sondern nur ein Geradenbüschel ist. Offenbar ist diese Zerlegung genau dann eindeutig, wenn U eine Cotschebycheffmenge ist. Dies führt auf:

BEMERKUNG 7.5: U ist genau dann eine Cotschebycheffmenge, wenn

$$U + \mathbb{R}z \cap U^\top$$

für jedes $z \in X \setminus U$ genau eine Gerade aus $U^\top$ enthält.

Wegen Bemerkung 7.3 haben wir:

BEMERKUNG 7.6: Sei W ein Unterraum von X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $W \subseteq U^\top$
- (b) $SG(W) \supseteq U \cap \partial B(0,1)$

Wenn W ein Unterraum von X ist, der in $U^\top$ liegt, hat jedes Element x aus $W+U$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = u+w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Die Abbildung P von $W+U$ auf U , die durch $P(x) = u$ definiert wird, ist linear und quasikontraktiv, also kontraktiv.

Sei umgekehrt P eine lineare und kontraktive Projektion eines Unterraums Y von X , der U enthält, auf U . Dann ist $\text{kern}(P)$ ein Unterraum von X , der in $U^\top$ liegt, und für den $Y = U + \text{kern}(P)$ gilt. Deswegen ist es gleichwertig, eine lineare und kontraktive Projektion eines Unterraums von X , der U enthält, auf U , oder aber einen "linearen Schnitt" von $U^\top$ zu betrachten. Mit Bemerkung 7.6 ergibt sich deshalb:

PROPOSITION 7.7: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Es existiert eine lineare, kontraktive Projektion von X auf U .
- (b) Es existiert ein zu U komplementärer Unterraum in X , der in $U^\top$ liegt.
- (c) $U \cap \partial B(0,1)$ liegt in einer $\text{codim}(U)$ -Schattengrenze.

Für einen Hyperteilraum H in X , der eine Existenzmenge bester Coapproximation ist, ist $H^\top$ nicht leer, und jede Gerade aus dem Geradenbüschel $H^\top$ ein zu H komplementärer Unterraum. Deshalb gilt:

BEMERKUNG 7.8: Jeder Hyperteilraum, der Existenzmenge bester Coapproximation ist, ist auch Wertebereich einer linearen Kontraktion.

Für eine glatte Norm ist U^T wegen der Linearität des semiinneren Produkts in der ersten Komponente stets ein Unterraum. Wir haben also:

BEMERKUNG 7.9: Wenn X eine glatte Norm trägt und U eine Existenzmenge bester Coapproximation ist, existiert eine eindeutig bestimmte lineare und kontraktive Projektion von X auf U .

Wenn U eine Gerade mit Richtungseinheitsvektor u ist, liegt jeder Hyperteilraum, der parallel zu einer Stützhyper-ebene an $B(0,1)$ in u ist, in U^T . Daraus folgt:

BEMERKUNG 7.10: Jede Gerade in X ist Wertebereich einer linearen Kontraktion, also eine Existenzmenge bester Co-approximation.

Wir können nun abschließend die Frage klären, wann die Menge der abgeschlossenen, normkonvexen Mengen mit der der Existenzmengen bester Coapproximation zusammenfällt (vgl. [15]):

PROPOSITION 7.11: Sei $\dim(X) > 2$. Dann ist X genau dann euklidisch, wenn alle abgeschlossenen, normkonvexen Mengen Existenzmengen bester Coapproximation sind.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Im euklidischen Fall gilt $P_K \subseteq R_K$ für jede abgeschlossene, konvexe Menge K .

" $\Leftarrow$ ": Sei K ein glatter, kompakter und konvexer Körper in X . Nach Bemerkung 7.8 und Proposition 1.19 ist die Richtung einer jeden Stützhyper-ebene an K und damit jeder Hyperteilraum von X Wertebereich einer linearen Kontraktion. Aus dem Satz von Kakutani folgt die Behauptung. //

Überdies erkennt man, daß unter den konvexen, kompakten Körpern außer im euklidischen Fall oder in der Ebene i.a. nicht sehr viele Existenzmengen bester Coapproximation zu

finden sind, da der "typische" konvexe Körper glatt und striktkonvex ist (vgl. [19]).

Der Schnitt einer zu U parallelen linearen Mannigfaltigkeit W mit $B(0,1)$ heißt ein zu U paralleler Hyperkreis. Man nennt

$$\inf_{w \in W} \sup_{z \in W \cap B(0,1)} \|z-w\|$$

den Tschebycheffradius dieses Hyperkreises. Eine geeignete Interpretation von Theorem 5 aus [17] ergibt:

PROPOSITION 7.12: Ein Unterraum ist genau dann eine Existenzmenge bester Coapproximation, wenn der Tschebycheffradius aller zu ihm paralleler Hyperkreise kleiner oder gleich 1 ist.

Schließlich wollen wir die Aussage von Proposition 1.8 für einen Unterraum U von X durch eine Beschreibung von $s_X(U)$ und $h_X(U)$ ergänzen. Wir greifen dabei auf Ansätze zurück, wie sie sich z.B. in der Arbeit von Lima (vgl. [23]) finden.

Wir nennen

$$Sp^m(X) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m : \sum_{i=1}^m x_i = 0\}$$

die Spur von X in X^m .

Für jedes $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i > 0$, liefert

$$\|\underline{x}\|_{\underline{\alpha}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \|x_i\|$$

eine Norm auf X^m . Die Einheitskugel von $Sp^m(X)$ bzgl. einer solchen Norm bezeichnen wir mit $Sp_{\underline{\alpha}}^m(X)$.

Offenbar haben m Kugeln in X genau dann leeren Durchschnitt, wenn sich ihr Produkt in X^m von der Dia-

gonale von X^m abtrennen läßt. Über Standardtrennungsargumente für konvexe Mengen erhält man (vgl. Theorem 1.1, [23]):

PROPOSITION 7.13: Sei $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ aus $\mathbb{R}^m$ mit $\alpha_i > 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(a) \quad \bigcap_{i=1}^m B(x_i, \alpha_i) \neq \emptyset$$

$$(b) \quad \left| \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \right| \leq 1 \quad \forall (f_1, \dots, f_m) \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X') \quad .$$

Sei L_m die Abbildung, die jedem m -Tupel von linearen Funktionalen $(f_1, \dots, f_m)$ mit $f_i \in X'$ und $f_1 + \dots + f_m = 0$ dessen Einschränkung $(f_1|_U, \dots, f_m|_U)$ auf U zuordnet. Offenbar ist L_m eine lineare Abbildung von $\text{Sp}^m(X')$ in $\text{Sp}^m(U')$ und es gilt

$$\text{kern}(L_m) = \text{Sp}^m(U^0)$$

und

$$L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')) \subseteq \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U')$$

für alle $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ mit $\alpha_i > 0$.

PROPOSITION 7.14: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) U hat die Durchschnittseigenschaft vom Grad m in X .

(b) Für alle $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_i > 0$, gilt:

$$L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')) = \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U') \quad .$$

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_i > 0$, so daß $\underline{f}^0$ in $\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U') \setminus L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X'))$ liegt. Dann gibt es ein $\underline{u}$ aus U^m mit

$$\sum_{i=1}^m |f_i(u_i)| < 1 \quad \forall \underline{f} \in L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X'))$$

und

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m |f_i^0(u_i)| > 1 \quad .$$

Für alle $\underline{f} \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')$ ist $\underline{f}|_U \in L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X'))$ und deshalb

$$\sum_{i=1}^m |f_i(u_i)| = \sum_{i=1}^m |f_i|_U(u_i)| \leq 1 \quad .$$

Wegen Proposition 7.13 haben wir

$$\bigcap_{i=1}^m B(u_i, \alpha_i) \neq \emptyset \quad .$$

Wegen (a) ist also

$$\bigcap_{i=1}^m B(u_i, \alpha_i) \cap U \neq \emptyset \quad .$$

Dies widerspricht wegen Proposition 7.13 der Aussage (*).

" $\Leftarrow$ ": Sei $(u_1, \dots, u_m) \in U^m$ und $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_i > 0$, so daß

$$\sum_{i=1}^m |f_i(u_i)| \leq 1 \quad \forall \underline{f} \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')$$

gilt. Wegen (b) entsteht jedes $\underline{g} \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U')$ als Einschränkung eines $\underline{f} \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')$ auf U . Wir haben deshalb

$$\sum_{i=1}^m |g_i(u_i)| = \sum_{i=1}^m |f_i|_U(u_i)| \leq 1$$

für alle $\underline{g} \in \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U')$. Wegen Proposition 7.13 ist also

$$\bigcap_{i=1}^m B(u_i, \alpha_i) \cap U \neq \emptyset \quad . \quad //$$

Wegen (b) hat man also zur Bestimmung von $h_X(U)$ nach dem größten m mit $L_m(\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')) = \text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U')$ zu suchen. Insbesondere muß $\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(U')$ für alle m eine zu $\text{Sp}_{\underline{\alpha}}^m(X')$ verwandte Struktur haben, wenn U eine Existenzmenge bester Coapproximation in X ist.

Ein linearer Unterraum hat nicht notwendig die Durchschnittseigenschaft von Grad $\dim(X)$:

BEISPIEL 7.15: $B(0,1)$ sei ein Zylinder im $\mathbb{R}^3$, auf dessen Stirnflächen euklidische Halbkugeln aufgesetzt sind. Seien x_1 und x_2 zwei Punkte, so daß $B(x_1,1)$ und $B(x_2,1)$ sich genau in einer zur Symmetrieachse des Zylinders parallelen Seitenlinie des Zylindermantels berühren, deren Länge gleich dem euklidischen Abstand der Stirnflächen ist. Sei p ein Randpunkt der Strecke $B(x_1,1) \cap B(x_2,1)$. Es ist leicht, einen Punkt x_3 zu finden, der nicht in der durch x_1, x_2 und $B(x_1,1) \cap B(x_2,1)$ definierten Ebene liegt, so daß

$$B(x_1,1) \cap B(x_2,1) \cap B(x_3,1) = \{p\}$$

ist. Dann hat die Ebene durch die Punkte x_1, x_2 und x_3 nicht die Durchschnittseigenschaft vom Grad 3.

Man sagt, X habe die (i,j) -Schnitteigenschaft (bzgl. $B(0,1)$), wenn jede Familie von i abgeschlossenen Kugeln nichtleeren Durchschnitt hat, wenn je j von ihnen nichtleeren Durchschnitt haben. Aus dem Satz von Helly folgt:

BEMERKUNG 7.16: $S_X(U)$ ist die kleinste natürliche Zahl m , so daß U die $(\dim(U)+1, m)$ -Schnitteigenschaft bzgl. $B(0,1) \cap U$ hat.

Theorem 2.10 aus [23] zeigt, daß die Schnittzahl von U an die Struktur der Extrempunkte von $Sp_1^{\dim(U)+1}(U')$ geknüpft ist:

PROPOSITION 7.17: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) U hat die $(\dim(U)+1, m)$ -Schnitteigenschaft bezüglich $B(0,1) \cap U$.
- (b) Die Extrempunkte von $Sp_1^{\dim(U)+1}(U')$ haben höchstens m von Null verschiedene Komponenten.

8. Über die Konvexitätsstruktur der Cosonnen bei striktkonvexer Norm

In diesem Abschnitt sei X stets striktkonvex. Damit fallen die Begriffe Existenzmenge bester Coapproximation, optimale Menge und Cosonne zusammen. Insbesondere sind Cosonnen abgeschlossen und konvex. Aus Proposition 1.19 ergibt sich:

BEMERKUNG 8.1: Die affinlineare Hülle einer Cosonne ist optimal.

BEMERKUNG 8.2: Sei K eine Cosonne mit nichtleerem Inneren. Dann ist die Stützhyperebene in jedem Glättepunkt von K optimal.

Mit S^{n-1} bezeichnen wir die euklidische Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$. Sei U ein Unterraum von X und W ein abgeschlossener Halbraum in U . Der eindeutig bestimmte Vektor $u \in U \cap S^{n-1}$, der auf der Begrenzungsebene von W in U bzgl. der euklidischen Norm senkrecht steht und von W weg zeigt, heißt die l_2 -Normale zu W .

Sei $H(U)$ die Menge der l_2 -Normalen zu den optimalen Halbräumen von U . Eine Teilmenge K von X heißt H-konvex bzgl. U , wenn K das Translat einer Teilmenge von U ist, die als Schnitt abgeschlossener Halbräume in U entsteht, deren l_2 -Normalen in $H(U)$ liegen (vgl. [6]).

$H(U)$ ist für jedes zweidimensionale U ein euklidischer Kreis. Aus den eingangs gemachten Bemerkungen ergibt sich:

PROPOSITION 8.3: Eine Teilmenge K von X ist genau dann eine Cosonne in X , wenn $\text{lin}(K)$ optimal in X und K H-konvex bzgl. des zu $\text{lin}(K)$ gehörigen Unterraumes.

Weiter folgert man aus Bemerkung 8.2 und 7.8 und Ergebnissen von Bruck ([9]), daß der Schnitt von kontraktiven Retrakten wieder ein kontraktives Retrakt ergibt:

PROPOSITION 8.4: Jede Cosonne ist kontraktives Retrakt ihrer linearen Hülle.

Insbesondere existiert genau dann eine Kontraktion von X auf eine Cosonne in X , wenn deren affin-lineare Hülle kontraktives Retrakt von X ist.

Wegen Bemerkung 1.18 gilt:

BEMERKUNG 8.5: $H(U)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine weitere elementare Eigenschaft von $H(U)$ gibt:

PROPOSITION 8.6: $H(U)$ ist abgeschlossen.

BEWEIS: O.B.d.A. sei $U = X$. Sei $\{h_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Vektoren aus $H(X)$, die gegen ein h aus X konvergieren. Die zugehörigen optimalen Hyperteilräume H_n in X konvergieren gegen einen Hyperteilraum H in X . Sei $x_n \in \partial B(0,1)$ mit $H_n \perp x_n$. Für ein $y \in H$ existiert eine Folge $\{y_n \in H_n: n \in \mathbb{N}\}$, die gegen y konvergiert. Dann haben wir:

$$\|y\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n\| \leq \|y - y_n\| + \|x_n - y_n\| \quad .$$

Der Grenzübergang liefert die Behauptung. //

Damit können wir als erstes Bemerkung 8.2 verschärfen:

PROPOSITION 8.7: Sei K eine Cosonne in X mit nichtleerem Inneren. Dann existiert in jedem Randpunkt von K eine optimale Stützhyperebene.

BEWEIS: Sei $k \in K$ und $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge aus $X \setminus K$, die gegen k konvergiert. Wegen Proposition 8.3 und 8.6 existiert eine Folge $\{H_n: n \in \mathbb{N}\}$ von optimalen Hyperebenen in X , die K und x_n trennen und gegen eine optimale Stützhyperebene an K in k konvergieren. //

Aus Proposition 8.7 erhalten wir die folgende Aussage über R_K^{-1} :

KOROLLAR 8.8: Für jede Cosonne K in X ist

$$|R_K^{-1}(k)| > 1$$

für jedes $k \in \partial K$.

Eine Teilmenge Ω von 2^X heißt eine Konvexitätsstruktur auf X , wenn sowohl $\emptyset$ als auch X in Ω enthalten sind, und Ω durchschnittsabgeschlossen ist. Man nennt (X, Ω) den zu Ω gehörigen Konvexitätsraum auf X .

Einen "Prototyp" einer Konvexitätsstruktur liefert die Klasse Γ der abgeschlossenen, konvexen Mengen in X . Mit der Menge Ψ der Cosonnen erhalten wir wegen Proposition 1.21 eine weitere, i.a. gröbere Konvexitätsstruktur auf X .

Wegen der Durchschnittsabgeschlossenheit läßt sich jeder Teilmenge T von X die kleinste Menge $\Omega(T)$ zuordnen, die in Ω liegt und T enthält.

Ω heißt endlich, wenn

$$\Omega(T) = \overline{\bigcup \{ \Omega(S) : S \subseteq T, |S| < \infty \}}$$

für alle $T \subseteq X$ gilt.

Ω heißt linear, wenn

$$\Omega(\{x, y\}) = [x, y]$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

Ω heißt kommutativ, wenn

$$\Omega(x \cap T) = x \cap \Omega(T)$$

für jedes $x \in X$ und jedes endliche T gilt. Dabei ist

$$x \cap T = \bigcup_{t \in T} \Omega(\{x, t\})$$

Diese Eigenschaft als Kommutativität zu bezeichnen, wird besonders sinnfällig für Konvexitätsstrukturen, bei denen

$$\Omega(\{x\}) = \{x\}$$

gilt, wie z.B. Ψ, Γ .

Wir können Γ unter den Konvexitätsstrukturen auf X durch diese Eigenschaften charakterisieren:

PROPOSITION 8.9: Sei (X, Ω) ein Konvexitätsraum. Ω ist genau dann die Klasse der abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von X , wenn Ω endlich, linear und kommutativ ist.

Beweis: " $\Leftarrow$ ": Wegen der Linearität und der Monotonie von Ω bzgl. Inklusion sind alle Elemente von Ω konvex. Weil $\Omega(T) = T$ für $T \in \Omega$ gilt, folgt aus der Endlichkeit von Ω die Abgeschlossenheit von $T \in \Omega$. Aus der Endlichkeit und der Kommutativität von Ω ergibt sich

$$\Omega(T) \subseteq \text{co}(T)$$

also

$$\Omega(T) = \text{co}(T)$$

für alle endlichen $T \subseteq X$. Aus der Endlichkeit von Ω folgt damit $\Omega(T) = T$ für jede abgeschlossene, konvexe Teilmenge T von X . //

Wie eng ist nun Γ mit Ψ verwandt?

BEMERKUNG 8.10: Ψ ist linear.

Beweis: $\Psi(\{x, y\})$ ist konvex und liegt in der Trägergerade von x und y . //

BEMERKUNG 8.11: Ψ ist endlich.

Beweis: Sei $T \subseteq X$ und $\{t_i: i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Elementen aus T , die dicht in T liegt. Wir setzen

$$T_i = \bigcup_{j=1}^i \{t_j\}$$

Da $\overline{\bigcup \{\Psi(T_i): i \in \mathbb{N}\}}$ eine Existenzmenge bester Coapproximi-

mation ist, welche T enthält, liegt $\Psi(T)$ in dieser Menge.

//

BEMERKUNG 8.12: Ψ ist i.a. nicht kommutativ.

BEWEIS: Man betrachte das Simplex S , das von $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$ und $z = (0,0,1)$ aufgespannt wird. Für $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$, ist S nicht optimal in l_p^3 , also S echt in $\Psi(\{x,y,z\})$ enthalten. Wegen der Linearität von Ψ ergibt sich einerseits

$$x \Psi(\{y,z\}) = x \Psi[y,z] = S, \quad ,$$

andererseits

$$\Psi(\{x,y,z\}) \subseteq \Psi([x,y] \cup [x,z]) = \Psi(S) = \Psi(x \Psi[y,z]) \quad .$$

Dies verletzt die Kommutativität.

//

In der Ebene ist Ψ natürlich kommutativ, weil die kleinste optimale Menge, die eine endliche Anzahl von Punkten enthält, deren konvexe Hülle ist.

Wir wollen uns mit weiteren Eigenschaften der Hülloperation Ψ beschäftigen.

In [2] wird der Begriff der Saturierten $\Lambda(T)$ einer Teilmenge T von X durch

$$\Lambda(T) = \overline{\bigcup \{T_i : i \in \mathbb{N}\}}, \quad T_1 = T, \quad T_i = \min(T_{i-1})$$

eingeführt und gezeigt, daß $\Lambda(T)$ optimal ist. Etwas schärfer gilt:

BEMERKUNG 8.13:

$$\Lambda(T) = \Psi(T) \quad .$$

BEWEIS: Ein $x \in T_2 \setminus \Psi(T)$ läßt sich im Widerspruch zur Minimalität von x bzgl. T durch eine Leibnizsche Ebene von T abtrennen. Also liegt T_2 in $\Psi(T)$. Induktiv folgt

$$\Lambda(T) \subseteq \Psi(T) \quad . \quad //$$

Unter bestimmten Umständen ist der Hülloperator Ψ beschränkt:

PROPOSITION 8.14: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) Für jede beschränkte Menge T ist $\Psi(T)$ beschränkt.
- (b) Jeder optimale Unterraum U von X wird von $H(U)$ erzeugt.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei U ein vom Nullraum verschiedener, optimaler Unterraum von X . Sei T eine beschränkte Teilmenge von U mit nichtleerem Inneren. Aus $H(U) = \emptyset$ folgt $\Psi(T) = U$, im Widerspruch zur Beschränktheit von Ψ . Also ist $H(U) \neq \emptyset$. Nehmen wir an, $H(U)$ liegt in einer Hemisphäre von $U \cap S^{n-1}$. Sei h die l_2 -Normale des zu dieser Hemisphäre gehörigen Halbraumes in U . Dann ist h eine Unendlichkeitsrichtung für jeden optimalen Halbraum in U und damit auch für die bzgl. U H -konvexe Menge $\Psi(T)$. Dies widerspricht der Beschränktheit von Ψ . Also liegt $H(U)$ in keiner Hemisphäre von $U \cap S^{n-1}$ und erzeugt damit ganz U . " $\Leftarrow$ ": Sei T eine beschränkte Teilmenge von X und U die lineare Hülle von $\Psi(T)$. Dann ist U optimal. Nehmen wir an, daß $\Psi(T)$ nicht beschränkt ist. Dann enthält $\Psi(T)$ einen Strahl. Weil T beschränkt ist, existiert zu jedem $u \in H(U)$ ein optimaler Halbraum in U , der T enthält. Der Schnitt aller solchen Halbräume ist H -konvex bzgl. U und enthält deshalb $\Psi(T)$. Damit muß der Winkel zwischen jedem $u \in H(U)$ und dem in $\Psi(T)$ verlaufenden Strahl größer oder gleich 90° sein, also $H(U)$ in einer Hemisphäre von $U \cap S^{n-1}$ liegen. Dann wird aber U nicht von $H(U)$ erzeugt. //

Die Klasse der Mengen, die bezüglich X H -konvex sind, ist i.a. echt in der Menge der Cosonnen von X enthalten. Bohnenblust ([5]) gibt Beispiele von Unterräumen von $\mathbb{R}^n$, in denen die Geraden die einzigen optimalen Unterräume sind. Wir beschreiben, wann die beiden Klassen übereinstimmen:

PROPOSITION 8.15: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) Jede Cosonne ist H-konvex bezüglich X.
- (b) Jeder von X verschiedene optimale Unterraum läßt sich als Schnitt optimaler Hyperteilräume von X darstellen.

BEWEIS: " $\Rightarrow$ ": Sei U ein von X verschiedener, optimaler Unterraum von X. Wegen (a) ist U H-konvex bzgl. X. Deshalb läßt sich U als Schnitt ausreichend vieler optimaler Halbräume und damit auch als Schnitt ausreichend vieler Hyperteilräume von X darstellen.

" $\Leftarrow$ ": Sei K eine Cosonne in X, die nicht ganz X aufspannt. K ergibt sich als Schnitt von in $\text{lin}(K)$ optimalen Halbräumen von $\text{lin}(K)$. Sei P ein solcher Halbraum. Der Rand von P ist optimal in $\text{lin}(K)$ und weil $\text{lin}(K)$ optimal in X ist, auch optimal in X. Damit ist der Rand von P H-konvex bzgl. X. Dann gibt es eine optimale Hyperebene in X, zu der $\text{lin}(K)$ nicht parallel ist, so daß man den Rand von P als Schnitt dieser Hyperebene mit $\text{lin}(K)$ erhält. Dann ist P als Schnitt eines zu dieser Hyperebene in X gehörigen optimalen Halbraumes mit der bzgl. X H-konvexen Menge $\text{lin}(K)$ auch H-konvex bzgl. X. //

In dieser Situation zeigt Ψ unterhalbstetiges Verhalten (vgl. [6], 4.4):

PROPOSITION 8.16: Wenn sich jeder von X verschiedene optimale Unterraum als Schnitt optimaler Hyperteilräume von X darstellen läßt, gilt

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \Psi(\bigcup \{B(t, \epsilon) : t \in T\}) = T$$

für alle optimalen Teilmengen T von X.

BEWEIS: Sei T eine optimale Teilmenge von X und x aus $X \setminus T$. Da T H-konvex bzgl. X ist, existiert ein optimaler Halbraum P in X, der T enthält, dessen Rand aber x

und T strikt trennt. Sei $B_\epsilon(T) = \bigcup \{B(t, \epsilon) : t \in T\}$.
Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt

$$B_\epsilon(T) \subseteq P \subseteq B_\epsilon(P) \quad ,$$

aber

$$x \notin B_\epsilon(P) \quad .$$

Aus der H -Konvexität von $B_\epsilon(P)$ folgt

$$x \notin \bigcap_{\epsilon > 0} \Psi(B_\epsilon(T)) \quad //$$

Daß die Einbettbarkeit optimaler Unterräume in optimale Hyperteilräume für das unterhalbstetige Verhalten von Ψ notwendig ist, zeigt:

BEMERKUNG 8.17: Wenn

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \Psi(\bigcup \{B(u, \epsilon) : u \in U\}) = U$$

für einen echten optimalen Unterraum U von X gilt, liegt dieser in einem optimalen Hyperteilraum von X .

BEWEIS: $B_\epsilon(U)$ ist der abgeschlossene Zylinder, der von U und $B(0, \epsilon)$ erzeugt wird. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß $\Psi(B_\epsilon(U))$ echt in X enthalten ist. $\Psi(B_\epsilon(U))$ besitzt eine in X optimale Stützhyperebene H . Da U zu H parallel ist, folgt die Behauptung. //

Wir greifen auf [5] zurück, um zu zeigen, daß endlich-dimensionale l_p -Räume die in Proposition 8.16 (b) angesprochene Eigenschaft haben.

Sei U ein m -dimensionaler Unterraum von l_p^n und $u^1, \dots, u^m$ eine Basis von U . Die Determinanten

$$p(j_1, \dots, j_m) = \begin{vmatrix} u^1_{j_1} & \dots & u^1_{j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ u^m_{j_1} & \dots & u^m_{j_m} \end{vmatrix}$$

mit $j_1 \in J_n = \{1, \dots, n\}$ heißen die Plückerkoordinaten von U . Sei

$$G_0 = \{j_0 \in J_n : p(j_0, J) = 0 \text{ für alle } J \subseteq J_n \text{ mit } |J| = m-1\}.$$

Dabei soll $J = \emptyset$ sein, wenn $|J|$ nicht positiv ist.

Aus ([5], Theorem 2.1) ergibt sich:

BEMERKUNG 8.18: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) $j_0 \in G_0$.
- (b) Die j_0 -te Koordinate eines jeden Elementes von U verschwindet.

Die Indexmenge $G'_0 \equiv J_n \setminus G_0$ ist genau dann nicht leer, wenn U nicht der Nullraum ist. Dies wollen wir in der Folge voraussetzen. Man definiert dann wie folgt eine Äquivalenzrelation auf G'_0 :

Zwei Indizes j_1 und j_2 aus G'_0 heißen äquivalent, wenn $p(j_1, j_2, J) = 0$ für jede $(m-2)$ -elementige Teilmenge J von J_n gilt.

Mit ([5], Theorem 2.2) haben wir:

BEMERKUNG 8.19: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) j_1 und j_2 aus G'_0 sind äquivalent.
- (b) Die Plückerkoordinate $p(j_1, j_2)$ eines jeden zweidimensionalen Unterraums von U ist Null.

G'_0 wird durch diese Äquivalenzrelation in die Äquivalenzklassen $G_1, \dots, G_l$ aufgeteilt. Sei $n_1 = |G_1|$. Wir haben

$$n_0 + n_1 + \dots + n_l = n.$$

Nach ([5], Theorem 3.2) ergibt sich:

PROPOSITION 8.20: Sei $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) U ist Wertebereich einer linearen Kontraktion von l_p^n .
- (b) Es gibt genau $\dim(U)$ -viele Äquivalenzklassen in G'_0 .

Wir weisen auf die Struktur der l_2 -Normalen zu optimalen Hyperteilräumen des l_p^n hin (vgl. z.B. [2]):

PROPOSITION 8.21: Sei $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$.

Ein Hyperteilraum ist genau dann optimal in l_p^n , wenn seine l_2 -Normale höchstens zwei von Null verschiedene Komponenten hat.

LEMMA 8.22: Die Matrix A besitze $u^1, \dots, u^m$ als Zeilenvektoren. Sei $h \in \{1, \dots, k\}$, $|G_h| > 1$ und $i, j \in G_h$ mit $i \neq j$. Dann sind die i-te und die j-te Spalte von A linear abhängig.

BEWEIS: Keine der zu i oder j gehörigen Spalten von A ist nach Bemerkung 8.18 eine Nullspalte. Nehmen wir an, daß für ein $l \in \{1, \dots, m\}$ zwar $u_i^l = 0$, aber $u_j^l \neq 0$ gilt. Da die i-te Spalte von A keine Nullspalte ist, gibt es ein $l' \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l\}$ mit $u_i^{l'} \neq 0$. Wegen Bemerkung 8.19 ist

$$\begin{vmatrix} u_i^l & u_j^l \\ u_i^{l'} & u_j^{l'} \end{vmatrix} = 0$$

Dies widerspricht $u_i^{l'} \cdot u_j^l \neq 0$. Also haben beide Spalten dasselbe Nullmuster. Wir betrachten die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} u_i^1 & u_i^2 & u_i^3 \\ u_j^1 & u_j^2 & u_j^3 \end{pmatrix}^T$$

von A. Dabei sei jedes der auftretenden Elemente von Null verschieden. Wegen Bemerkung 8.19 existieren λ_1 und λ_2 aus $\mathbb{R}$ mit

$$(u_i^{1_1}, u_i^{1_2})^T = \lambda_1 \cdot (u_j^{1_1}, u_j^{1_2})^T$$

und

$$(u_i^{1_2}, u_i^{1_3})^T = \lambda_2 \cdot (u_j^{1_2}, u_j^{1_3})^T$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda_1 = u_i^{1_2}/u_j^{1_2} = \lambda_2$$

Also sind die Spalten i und j von A linear abhängig. //

Damit können wir zeigen:

SATZ 8.23: Sei $1 < p < +\infty$. Jeder von l_p^n verschiedene, optimale Unterraum ergibt sich als Schnitt optimaler Hyperteilräume von l_p^n .

BEWEIS: Für $p = 2$ oder $n = 1, 2$ ist nichts zu zeigen. Sei also $p \neq 2$ und $n \geq 3$. Weiter sei U ein optimaler Unterraum von l_p^n der Dimension $m \leq n-2$. Die zugehörige Matrix A sei wie in Lemma 8.22 vereinbart. Nach Proposition 8.20 gibt es genau m Äquivalenzklassen in G'_0 . Wir haben

$$(*) \quad n = n_0 + (n_1 + \dots + n_m)$$

Nach Bemerkung 8.18 ist für ein $j \in G_0$ die j -te Spalte von A eine Nullspalte. Damit enthält der zu

$$(\delta_{ij})_{i=1, \dots, n}$$

als l_2 -Normale gehörige Hyperteilraum den Unterraum U . Wegen Proposition 8.21 ist ein solcher Hyperteilraum optimal. Wir erhalten also n_0 verschiedene, optimale Hyperteilräume von l_p^n , die U enthalten. Wegen (*) ist

$$n_0 \leq n-m$$

Für den Fall, daß $n_0 = n-m$ ist, sind wir fertig. Nehmen wir also an, $i = n-m-n_0$ sei positiv. Die i überzähligen Spaltenindizes müssen sich auf die m Äquivalenzklassen $G_1, \dots, G_m$ verteilen, von denen jede mindestens einen Spaltenindex enthält. Wegen Lemma 8.22 bekommen wir i ver-

schiedene Paare von linear abhängigen Spalten von A . Nach Proposition 8.21 kommen also zu den n_0 verschiedenen, optimalen Hyperteilräumen von l_p^n , die U enthalten, i weitere. //

KOROLLAR 8.24: Sei $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$. Das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ beschreibt genau dann einen optimalen Teilraum von l_p^n , wenn jede Zeile von B höchstens zwei von Null verschiedene Elemente enthält.

KOROLLAR 8.25: Sei $1 < p < +\infty$. Jede Cosonne in l_p^n ist H -konvex bzgl. l_p^n .

Die Konvexitätsstruktur Ω hat die Hellyzahl $h(\Omega)$, wenn $h(\Omega)$ die kleinste natürlich Zahl h mit der folgenden Eigenschaft ist: Jede endliche Folge von Elementen aus Ω , so daß der Durchschnitt über je h dieser Elemente nicht leer ist, hat nichtleeren Durchschnitt.

Der Satz von Helly besagt gerade, daß die Hellyzahl der Menge der konvexen Teilmengen von X gleich $\dim(X)+1$ ist.

Da jede Cosonne konvex ist, haben wir jedenfalls

$$h(\Psi) \leq \dim(X)+1.$$

Sei Φ die Konvexitätsstruktur der bzgl. X H -konvexen Mengen.

l Vektoren aus X heißen positiv abhängig, wenn sie mit positiven Skalaren zu Null kombiniert werden können. Sie heißen minimal abhängig, wenn sie positiv abhängig sind, aber je $(l-1)$ von ihnen linear unabhängig sind.

$md(H(X))$ sei die größte Zahl m , so daß es $m+1$ minimal abhängige Vektoren in $H(X)$ gibt. Mit ([6], Theorem 6.4) können wir die Hellyzahl von Φ angeben:

SATZ 8.26: Wenn $H(X)$ nicht in einer Hemisphäre von S^{n-1} liegt, gilt:

$$h(\Phi) = md(H(X)) + 1.$$

Damit können wir $h(\Psi)$ in endlichdimensionalen l_p -Räumen berechnen:

KOROLLAR 8.27: Sei $1 < p < +\infty$. In l_p^n gilt: $h(\Psi) = n+1$.

BEWEIS: Für $p = 2$ oder $n = 1, 2$ ist nichts zu zeigen. Sei also $p \neq 2$ und $n \geq 3$. Es reicht, nachzuweisen, daß es in l_p^n mindestens $n+1$ minimal abhängige Vektoren mit höchstens zwei von Null verschiedenen Komponenten gibt, von denen einer genau eine von Null verschiedene Komponente hat. Wir tun dies induktiv:

Für $n = 3$ ist

$$(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1) \text{ und } (-1, -1, 0)$$

ein solcher Satz von Vektoren.

Nehmen wir nun an, daß jeder $(n-1)$ -dimensionale l_p -Raum einen solchen Satz von Vektoren besitzt. Sei U der Hyper-
teilraum zur l_2 -Normale $(0, \dots, 0, 1)$ in l_p^n . Da U ein $(n-1)$ -dimensionaler l_p -Raum ist, finden wir einen Satz von n minimal abhängigen Vektoren $u^1, \dots, u^n$ in U , so daß u^1 höchstens zwei von Null verschiedene Komponenten hat und o.B.d.A. $u^1 = (u_1^1, 0, \dots, 0)$ mit $u_1^1 \neq 0$ gilt. Dann haben wir in

$$(u^1, -u_1^1), (u^2, 0), \dots, (u^n, 0), (0, \dots, 0, u_1^1)$$

ein System von $n+1$ minimal abhängigen Vektoren in l_p^n
mit den gewünschten Eigenschaften. //

Betrachten wir abschließend einen dritten Aspekt der Konvexitätsstruktur der Cosonnen:

Sei K ein kompakter, konvexer Körper in X . Die zu K gehörige sphärische Abbildung ordnet jeder Borelmenge M von S^{n-1} die Borelmenge der Randpunkt von K zu, in denen ein Stützhalbraum an K existiert, dessen l_2 -Normale in M liegt.

Die Oberflächenfunktion F_K , die M das Maß von $S_K(M)$ zuordnet, ist eine nichtnegative, σ -additive Mengenfunktion

auf der σ -Algebra der Borelmengen von S^{n-1} . Offenbar ist K genau dann H -Konvex bzgl. X , wenn der Träger von F_K in $H(X)$ liegt. F_K legt K bis auf eine Translation fest.

Ein konvexer Körper, dessen Oberflächenfunktion die Summe der Oberflächenfunktionen zwei konvexer Körper ist, heißt die Blaschkesumme dieser Körper.

Sei $\lambda > 0$. Die Blaschkemultiplikation von K mit λ ergibt den konvexen Körper, dem die Oberflächenfunktion $\lambda \cdot F_K$ zugeordnet ist.

Sei Π die Menge der kompakten Cosonnen mit nichtleerem Inneren modulo einer Translation vereinigt mit der Menge der Punkte von X . Π wird bzgl. der soeben definierten Addition und Skalarmultiplikation zu einem konvexen Kegel mit Spitze in $\{0\}$.

Aus ([7], Theorem 1) ergibt sich:

PROPOSITION 8.28: $H(X)$ liege nicht in einer Hemisphäre von S^{n-1} . Dann werden die Extremalstrahlen von Π genau von den n -dimensionalen, optimalen Simplizes erzeugt.

Auf diese Weise sind die in diesem Sinn extremalen Cosonnen in Π identifiziert. Wenn man ein Analogon zum Satz von Krein-Milman zur Verfügung hat, kann man aus solchen elementaren Cosonnen alle anderen aufbauen. Bronstein gibt in ([7], Theorem 2) eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein solches Verhalten auftritt. Leider ist diese in l_p -Räumen i.a. nicht erfüllt.

LITERATURVERZEICHNIS:

- [1] Ando, T., Contractive projections in L_p spaces, Pac.J.Math. 17 (1966), 391-405
- [2] Beauzamy, B., Maurey, B., Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach, J.Funct.Anal. 24 (1977), 107-139
- [3] Beauzamy, B., Projections contractantes dans les espaces de Banach, Bull.Sc.Math. 102 (1978), 43-47
- [4] Berens, H., Über die beste Approximation im R^n , Vordruck 1981
- [5] Bohnenblust, F., Subspaces of $l_{p,n}$ spaces, Am.J.Math. 63 (1941), 64-72
- [6] Boltyanskii, V.G., Soltan, P.S., Combinatorial geometry and convexity classes, Russian Math. Surveys 33 (1978), 3-42
- [7] Bronstein, E.M., Extremal H-convex bodies, Sib.Math.J. 20 (1979), 295-297
- [8] Bruck, R.E., Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces, Pac.J.Math. 47 (1973), 341-355
- [9] Bruck, R.E., Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, T.A.M.S. 179 (1973), 251-262
- [10] Bruck, R.E., Reich, S., Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces, 3 (1977), 459-470
- [11] Busemann, H., On Leibniz definition of planes, Am.J. Math. 63 (1941), 101-111
- [12] Busemann, H., The foundations of Minkowskian geometry, Comm.Math.Hel. 24 (1950), 156-186
- [13] Busemann, H., The geometry of geodesics, New York (1955)

- [14] Dotson, W.G., Fixed points of quasicontractive mappings, J. Austr. Math. Soc. 13 (1972), 167-170
- [15] DeFigueiredo, D.G., Karlovitz, L.A., The extension of contractions of normed spaces, Proc. Symp. Pure Math. 18 (1970), 95-104
- [16] Franchetti, C., Furi, M., Some characteristic properties of real Hilbert spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 17 (1972), 1045-1048
- [17] Franchetti, C., Chebycheff centers and hypercircles, Bollettino U.M.I. 11 (1975), 565-573
- [18] Gruber, P.M., Fixpunktmengen von Kontraktionen in endlichdimensionalen Räumen, Geometriae Dedicata 4 (1975), 179-198
- [19] Gruber, P.M., Die meisten konvexen Körper sind glatt, aber nicht zu glatt, Math. Ann. 229 (1977), 267-278
- [20] Kalisch, G.K., Straus E.G., On the determination of points in a Banach space by their distances from points of a given set, An. Acad. Brasil. Ci. 29 (1957), 501-519
- [21] Karlovitz, L.A., The construction and application of contractive retractions in 2-dimensional normed linear spaces, Ind. Univ. Math. J. 22 (1972), 473-481
- [22] Leibniz, Mathematische Schriften, zweite Abteilung 1, 166
- [23] Lima, A., Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces, T.A.M.S. 227 (1977), 1-62
- [24] Mann, H., Untersuchungen über Wabenzellen bei allgemeiner Minkowskischer Metrik, Mh. Math. Phys. 42 (1937), 74-83
- [25] Papini, P.L., Singer, I., Best coapproximation in normed linear spaces, Monatsh. Math. 88 (1979), 27-44
- [26] Vlasov, L.P., Approximate properties of sets in normed linear spaces, Russian Math. Surveys 28 (1973), 1-66

- [27] Westphal, U., Über die Existenz- und Eindeutigkeitsmengen bei der besten Coapproximation, erscheint in "Linear Spaces and Approximation", edited by P. Butzer, E. Görlich und B. Sz.-Nagy, ISNM Birkhäuser Verlag
- [28] Wulbert, D. E., Contractive Korovkin Approximations, J. Funct. Anal. 19 (1975), 205-215
- [29] Zamfirescu, T., Nonexistence of curvature in most points of most convex surfaces, Math. Ann. 232 (1980), 217-219

INDEX:

- Abbildung
 - orthogonale, 24
 - quasikontraktive, 15
 - stark kontraktive, 45
- Abstiegskegel, 21
- beweglich, 61
- Blaschkemultiplikation, 92
- Blaschkesumme, 92
- Approximationsbereich
 - Browderscher, 24
- Coapproximation
 - beste, 8
 - Element bester, 8
 - Existenzmenge bester, 8
 - lineare Existenzmenge bester, 71
- Coprojektion
 - metrische, 8
- Cosonne, 22
 - strikt, 22
- Cotschebycheffmenge, 60
 - triviale, 60
 - elementare, 68
- determinierend, 15
- duale *-Norm, 35
- Durchschnittseigenschaft
 - bzgl. T , 8
 - vom Grad α , 9
- Durchschnittszahl, 11
- Entfernung
 - minimale, 28
- H-konvex, 79
- Hellyzahl, 90
- Hyperkreis, 75
- Konvexitätsraum, 81
- Konvexitätsstruktur, 81
 - endliche, 81
 - kommutative, 81
 - lineare, 81
- Krümmungsverhältnis
 - oberes/unteres, 55
- l_2 -Normale, 79
- Leibnizsche Ebene, 12
- Leibnizscher Halbraum, 12
- Lichtpunkt, 43
- minimal, 16
 - im weiteren Sinn, 16
- minimal abhängig, 90
- Normgerade, 68
- normkonvex, 10
- Normstrahl, 68
- Normstrecke, 10
- Oberflächenfunktion, 91
- optimal, 17
 - im engeren Sinn, 17
- orthogonal, 5
- Parallelstreifen, 64
 - Richtung des, 64
 - trivialer, 64
- Plückerkoordinaten, 87
- positiv abhängig, 90
- Saturierte, 83
- Schattengrenze, 30
 - oberer/unterer Rand der, 31
- Schattenkegel, 31
 - oberer/unterer Rand des, 31

- oberer/unterer Halbraum des, 31
- Schnitteigenschaft
- (i,j) -, 78
- vom Grad n , 11
- Schnittzahl, 11
- semiinneres Produkt, 5
- Sonne, 21
- strikte, 21
- sphärische Abbildung, 91
- Spur, 75
- transversal, 5
- Tschebycheffradius, 75
- Unendlichkeitsrichtung, 64

L E B E N S L A U F

Lothar H e t z e l t	8520 Erlangen Bismarckstr. 21
Geburtsdatum	28.6.52
Geburtsort	Altenkunstadt
Familienstand	ledig
Konfession	römisch-katholisch
Beruf des Vaters	kaufmännischer Angestellter
Schulbildung	Volksschule in Bamberg von 1958-1962 Franz-Ludwig-Gymnasium Bam- berg, neusprachlicher Zweig 1962-1971
Abitur	19.6.1971
Wehrdienst	1971/72
Studium	der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen von 1972-1978, davon akademisches Jahr 1976/77
Studium in Frankreich	
Staatsexamen	21.12.1977
Diplomprüfung	17.11.1978
Berufstätigkeit	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Werkstoffwis- senschaften I der Universität Erlangen seit Frühjahr 1979

Erlangen, den 10.11.1981

